UNIVERSIDAD AUTÓNOMA METROPOLITANA
IZTAPALAPA

Propiedades Determinadas por Redes y Espacios de Whyburn

Tesis, que para obtener el grado académico de
Doctora en Ciencias (Matemáticas),
presenta:

M. en C. Maira Madriz Mendoza

Director de Tesis:

Dr. Richard G. Wilson

2012

Índice general

Introducción

Si X es un espacio topológico y $F \subset X$, nos permitimos decir que F es *casi cerrado* si $cl_X(F) \setminus F$ es un conjunto de un sólo punto. El hecho de que $cl_X(F) \setminus F = \{x\}$, se denota por $F \to x$. Es natural decir que la topología de un espacio X está *determinada por subespacios casi cerrados* si, para cualquier conjunto no cerrado $A \subset X$ y cualquier $x \in cl_X(A) \setminus A$, existe un conjunto casi cerrado $F \subset A$ tal que $F \to x$. Por analogía con los conceptos de Fréchet-Urysohn y secuencial, decimos que un espacio topológico X es *débilmente determinado por subespacios casi cerrados* si, para cualquier conjunto no cerrado $A \subset X$, existe un conjunto casi cerrado $B \subset A$ tal que $B \to x \notin A$.

El origen de los espacios determinados por subespacios casi cerrados se remonta a 1970 en un artículo póstumo del propio Whyburn, denominado Accessibility Spaces, [38]. Dichos espacios fueron introducidos más como una herramienta que como una generalización de los espacios de Hausdorff y primero numerables. Durante los siguientes 30 años, estos conceptos aparecieron y desaparecieron repetidamente bajo varios nombres. Incluso cobraron vida en la topología de categorías en [34] y luego se convirtieron en objeto de un intenso estudio en el contexto de los espacios pseudoradiales y afines. Sin embargo, los términos Whyburn y débilmente Whyburn, datan aproximadamente del 2002 cuando los especialistas decidieron darle crédito a Whyburn, llamando *espacios de Whyburn (débilmente Whyburn)* a los espacios determinados por subespacios casi cerrados (débilmente determinados por subespacios casi cerrados).

El objetivo medular de esta tesis es estudiar a profundidad los espacios de Whyburn y débilmente Whyburn. Técnicamente, nos dimos a la tarea de encontrar respuestas a interrogantes propias, investigar qué teoremas bien conocidos son extendibles a la clase de los espacios de Whyburn (débilmente

Whyburn) y, en el mejor de los casos, a examinar una extensión de la teoría.

El presente trabajo, está distribuido en tres capítulos y un apartado final de preguntas abiertas. En el primero, se exponen algunas funciones cardinales, se mencionan propiedades básicas de los espacios en cuestión y, está dedicado esencialmente, a probar los resultados hasta ahora conocidos que serán de utilidad para los capítulos posteriores. Además, introducimos un tipo especial de redes, llamadas κ-redes y brindamos generalizaciones de los conceptos de Fréchet y secuencial con el fin de hacer algunas observaciones.

En el segundo capítulo caracterizamos algunas generalizaciones de compacidad en términos de puntos de acumulación de κ-redes. Como las propiedades de tipo compacidad se definen usualmente en términos de cubiertas más que en términos de sucesiones y redes, para un cardinal arbitrario κ se prueban κ-generalizaciones de varios teoremas famosos sobre los espacios numerablemente compactos y secuencialmente compactos. Entre otras cosas, se muestra una generalización de un resultado de Murtinová relativo a la propiedad de Whyburn en espacios numerables y obtenemos una condicion sobre κ para que un espacio κ-Fréchet sea de Whyburn en espacios numerables.

El tercer capítulo, está dedicado a probar algunas desigualdades cardinales válidas en los espacios de Whyburn y hereditariamente débilmente Whyburn. También, se construyen ejemplos que nos permiten ilustrar que algunos resultados conocidos no pueden ser generalizados. Asimismo, contestamos a un par de preguntas referentes a espacios submaximales.

La notación empleada es la usual y los términos no definidos pueden encontrarse en [17]. Las letras X, Y, Z denotan, en general, espacios topológicos, mientras que x, y, z, p, q se usan para hacer referencia a puntos de algún espacio. Como hay una biyección entre los cardinales y los ordinales infinitos, éstos son representados por las letras griegas minúsculas $\alpha, \beta, \gamma, \kappa, \lambda, \xi$.

La letra ω representa el primer cardinal infinito y ω_1 se refiere al primer cardinal no numerable. Dado un espacio (X, τ) y $A \subset X$, la *cerradura* de A en X se designa por $cl_X(A)$ (o bien, $cl_\tau(A)$ si es necesario indicar la topología) y el *interior* de A en X se denota por $int_X(A)$ (análogamente, $int_\tau(A)$ indica la topología). Las funciones $\pi_X : X \times Y \longrightarrow X$ y $\pi_Y : X \times Y \longrightarrow Y$, representarán las proyecciones naturales sobre X y Y, respectivamente.

Capítulo 1

Nociones Fundamentales

En el presente capítulo estableceremos las nociones y resultados fundamentales que vamos a utilizar. Iniciaremos con la presentación de conceptos y resultados que motivan este trabajo.

A menudo usaremos resultados y terminología, que sin lugar a dudas, el lector familiarizado recordará. Cuando usemos algún resultado en el que no se incluya la prueba, daremos la referencia necesaria.

1.1. Algunas Funciones Cardinales

Dado un espacio topológico de Hausdorff X, empezamos esta sección definiendo algunas funciones cardinales que nos serán de utilidad a lo largo del presente trabajo.

- *cardinalidad*

  $\mid X \mid =$ cardinalidad de $X + \omega$.

- *peso*

  $w(X) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| : \mathcal{B} \text{ es una base para } X\} + \omega$.

- *densidad*

  $d(X) = \text{mín}\{|S| : S \subseteq X,\ cl_X(S) = X\} + \omega$.

- *carácter*

  $\chi(p, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \text{ es una base local para } p\}$;

  $\chi(X) = \sup\{\chi(p, X) : p \in X\} + \omega$.

- *pseudocarácter*

  $\psi(p, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \bigcap\{V \in \mathcal{V} : p \in V\} = \{p\}\}$;

  $\psi(X) = \sup\{\psi(p, X) : p \in X\} + \omega$.

- *pseudocarácter cerrado*

  $\psi_c(p, X) = \text{mín}\{|\mathcal{V}| : \mathcal{V} \subset \tau(X), p \in \bigcap \mathcal{V} \text{ y } \{p\} = \bigcap\{cl_X(V) : V \in \mathcal{V}\}$;

  $\psi_c(X) = \sup\{\psi_c(p, X) : p \in X\} + \omega$.

- *estrechez*

  $t(p, X) = \text{mín}\{\kappa : \text{para toda } Y \subset X \text{ con } p \in cl_X(Y), \text{ existe } A \subseteq Y \text{ con } |A| \leq \kappa \text{ y } p \in cl_X(A)\}$;

  $t(X) = \sup\{t(p, X) : p \in X\} + \omega$.

1.1 Teorema ([23]). *En un espacio compacto y de Hausdorff X, se cumple que $\psi(X) = \chi(X)$. En particular, cualquier espacio compacto con pseudo-carácter numerable es primero numerable (ver el Teorema 7.1 de [23]).*

1.2. Generalizaciones de los Espacios Primero Numerables

Los espacios de Fréchet y secuenciales pertenecen al folklore casi desde los orígenes de la topología general. Sin embargo, tales espacios fueron estudiados por primera vez como los conocemos actualmente a partir de 1965 por Franklin en [18] y [19]. Los espacios de Fréchet y secuenciales son generalizaciones de los espacios primero numerables y han sido objeto de estudio en distintas áreas de las matemáticas.

1.2 Definición. *Un espacio X es **Fréchet-Urysohn**, si para cualquier subconjunto $A \subset X$ y para cualquier $x \in cl_X(A)$ existe una sucesión $S \subset A$ que converge a x.*

1.3 Definición. *Un espacio X es **secuencial**, si para cualquier subconjunto no cerrado $A \subset X$ existe una sucesión $S \subset A$ que converge a algún $x \in cl_X(A) \setminus A$.*

De la definición se sigue que, todo espacio de Fréchet es secuencial. Los siguientes espacios serán nuestro principal objetivo, su orígen se remonta a principios de los años 70's en [38].

1.4 Definición. *Un espacio X es de **Whyburn** siempre que para cualquier conjunto no cerrado $A \subset X$ y para todo $x \in cl_X(A) \setminus A$ existe un subconjunto $B \subset A$ tal que $cl_X(B) \setminus A = \{x\}$.*

1.5 Definición. *Un espacio X es **débilmente Whyburn** siempre que para cualquier conjunto no cerrado $A \subset X$ existe un subconjunto $B \subset A$ tal que $cl_X(B) \setminus A = \{x\}$ para alguna $x \in cl_X(A) \setminus A$.*

Luego, todo espacio de Whyburn es débilmente Whyburn. Sin embargo, el recíproco no siempre se cumple, como lo ilustra el ordinal $\omega_1 + 1$ con la topología del orden.

1.6 Definición. *Un subconjunto A de un espacio X es **Whyburn cerrado**, si para cualquier $F \subset A$ se tiene que $\mid cl_X(F) \setminus A \mid \neq 1$.*

Obsérvese que un espacio X es débilmente Whyburn si y sólo si cualquier subconjunto Whyburn cerrado de X es cerrado.

Cabe mencionar que la propiedad de Whyburn es una propiedad hereditaria, mientras que la propiedad débilmente Whyburn sólo se preserva para subconjuntos abiertos y para cerrados. Es bien conocido que, todo espacio de *Hausdorff Fréchet es de Whyburn* y que cada espacio de *Hausdorff secuencial es débilmente Whyburn.* También se tiene que los espacios de Whyburn secuenciales son de Fréchet.

Las siguientes definiciones fueron introducidos en los años 60's y son interesantes por si mismas, no obstante, las emplearemos dadas las importantes conexiones que hay con las propiedades que estudiaremos.

1.7 Definición. *Un subconjunto A de un espacio X es **κ-cerrado** (respectivamente, **$< \kappa$-cerrado**) si $B \subset A$ y $|B| \leqslant \kappa$ (respectivamente, $|B| < \kappa$) implican que $cl_X(B) \subset A$.*

Cabe señalar que a cualquier función $S : \alpha \longrightarrow X$ donde α es cualquier ordinal le llamaremos *cadena* y, en adelante, se denotará en la forma $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$, donde $S(\beta) = x_\beta$. Reservamos el término *sucesión* para cadenas de longitud numerable.

La cadena $\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ se dice que converge a un punto x, si para cualquier vecindad U de x, existe algún $\gamma < \alpha$ tal que $x_\beta \in U$ para cada $\beta \geq \gamma$.

1.8 Definición. *Un espacio X es **semiradial** siempre que para cualquier conjunto no κ-cerrado $A \subset X$, existe una cadena $\{x_\xi : \xi \in \lambda\} \subset A$, con $\lambda \leqslant \kappa$, que converge a un punto en $X \setminus A$.*

1.9 Definición. *Un espacio X es **pseudoradial**, si cualquier conjunto no cerrado $A \subset X$ contiene una cadena que converge a un punto en $X \setminus A$.*

1.10 Definición. *Un espacio X es **radial**, si cualquier punto en la cerradura de un subconjunto $A \subset X$ es límite de una cadena en A.*

Nótese que radial implica semiradial y semiradial implica pseudoradial. Además, cualquier espacio hereditariamente pseudoradial es radial. Por otro lado, los espacios secuenciales son pseudoradiales y los espacios de Fréchet son radiales. Un espacio radial no necesariamente es secuencial.

1.3. Otras Definiciones y Resultados

Ahora nos ocuparemos de conceptos y resultados diversos, que no tienen relación propiamente, pero que nos servirán como herramienta en los siguientes capítulos.

1.11 Lema. *Sea X un espacio de Hausdorff infinito. Si existe un abierto infinito U en X y $p \in U$ tal que cada vecindad cerrada V de p tiene la propiedad de que $U \setminus V$ es finito, entonces $U \setminus \{p\}$ es discreto.*

1.12 Lema. *Si X es un espacio de Hausdorff e infinito, entonces contiene a un subconjunto discreto infinito.*

Demostración. Si existen un subconjunto abierto infinito $U \subseteq X$ y $p \in U$ como en el Lema 1.11, entonces $U \setminus \{p\}$ es discreto. Si tales U y p no existen, entonces para cada abierto $W \subseteq X$ y $x \in W$, existe una vecindad abierta V de x tal que $W \setminus V$ es infinito. Sea $x_1 \in W$ con $x_1 \neq x$. Entonces existe existe una vecindad abierta V_1 de x_1 tal que $W \setminus V_1$ es infinito y $x \notin cl_X(V_1)$. Análogamente, existen $x_2 \in W \setminus V_1$ distinto de x y un abierto V_2 de x_2 tales que $W \setminus (V_1 \cup V_2)$ es infinito y $x_2 \notin cl_X(V_1)$. Al proceder recursivamente, se obtiene que el conjunto $\{x_n : n \in \omega\}$ es el subconjunto discreto requerido. $\square$

Una colección de subconjuntos abiertos, no vacíos y disjuntos dos a dos en X se llama ***familia celular***.

1.13 Lema. *Sean X un espacio de Hausdorff con la propiedad de que para cada abierto U en X y $p \in U$, existe una vecindad cerrada V de p tal que $U \setminus V$ es infinito. Entonces, si $x \in X$ existe una familia celular infinita tal que para cada $U \in \gamma$, $x \notin cl_X(U)$.*

Demostración. Sean $x, x_1 \in X$ distintos. Entonces existe un abierto U_1 de x_1 en X tal que $x \notin cl_X(U_1)$ y $X \setminus cl_X(U_1)$ es infinito. Aplicando el mismo argumento a $X \setminus cl_X(U_1)$ y siguiendo con el proceso, se obtiene una familia celular $\gamma = \{U_i : i \in I\}$. $\square$

1.14 Teorema. *Sean (X, τ) un espacio de Hausdorff infinito y $x \in X$. Existe una familia celular γ infinita tal que para cada $U \in \gamma$, $x \notin cl_X(U)$. Además, γ se puede extender a una familia maximal celular con dicha propiedad.*

Demostración. Si existe un subconjunto abierto infinito $U \subseteq X$ y $p \in U$ tal que cada vecindad cerrada V de p tiene la propiedad de que $U \setminus V$ es finito, entonces cada punto de $U \setminus \{p\}$ es aislado y $\{\{y\} : y \in U \setminus \{p\}\}$ es una familia celular infinita. Si tales U y p no existen, entonces la existencia de la familia celular se sigue del Lema 1.13.

Sea $\mathcal{P} = \{\gamma : \gamma$ es una familia celular y $x \notin cl_X(U)$ para cada $U \in \gamma\}$. Dadas $\gamma, \gamma' \in \mathcal{P}$ hacemos $\gamma \leq \gamma'$ si $\gamma \subset \gamma'$. Esto hace que el conjunto $\mathcal{P}$ sea parcialmente ordenado. A continuación probaremos que $(\mathcal{P}, \leq)$ tiene todas sus cadenas acotadas.

Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $\mathcal{P}$. Si $\mu = \bigcup \mathcal{C}$, entonces $\gamma \leq \mu$ para todo $\gamma \in \mathcal{C}$, así que basta establecer que $\mu \in \mathcal{P}$ para cerciorarnos de que la cadena $\mathcal{C}$ es acotada en $\mathcal{P}$. Si $U \in \mu$ entonces $U \in \gamma$ para alguna $\gamma \in \mathcal{C}$. Como γ es una familia celular con la propiedad requerida, se tiene que $x \notin cl_X(U)$. Así que basta verificar que μ es una familia celular. Sean $U, V \in \mu$ con $U \neq V$. Entonces existen $\gamma_U, \gamma_V \in \mathcal{C}$ tales que $U \in \gamma_U$ y $V \in \gamma_V$. Como $\mathcal{C}$ es una cadena, tenemos que $\gamma_U \subset \gamma_V$ o $\gamma_V \subset \gamma_U$. Si $\gamma_U \subset \gamma_V$ entonces $U, V \in \gamma_V$. De manera que U, V son abiertos, ajenos y no vacíos. Análogamente, si $\gamma_V \subset \gamma_U$. Luego, $\mathcal{P}$ tiene todas sus cadenas acotadas. Por el Lema de Zorn, concluimos que $\mathcal{P}$ tiene un elemento ξ que es maximal en $\mathcal{P}$.

$\square$

1.15 Proposición ([9]). *Si X es un espacio de Hausdorff, compacto y débilmente Whyburn entonces es pseudoradial.*

Demostración. Sea $A \subset X$ no cerrado. Entonces existen $B \subset A$ y $x \in cl_X(A) \setminus A$ tales que $cl_X(B) \setminus A = \{x\}$. Por el Teorema 1.1, podemos elegir una base local $\{U_\xi : \xi \in \kappa\}$ de x en $cl_X(B)$ de cardinalidad mínima que satisfaga que $\bigcap_{\xi \in \kappa} cl_X(U_\xi) = \{x\}$. Por minimalidad, si $\nu < \kappa$ entonces en $cl_X(B)$ se tiene que $[\bigcap_{\nu \in \xi} cl_X(U_\nu)] \setminus \{x\} \neq \emptyset$ para toda $\xi \in \kappa$. Para cualquier $\xi < \kappa$ escogemos un punto $x_\xi \in ([\bigcap_{\nu \in \xi} cl_X(U_\nu)] \setminus \{x\})$ de manera que $\{x_\xi : \xi \in \kappa\}$ forma una cadena en $cl_X(B) \setminus \{x\} = B$. Dada una vecindad V de x, por regularidad de $cl_X(B)$, existe $\xi_0 \in \kappa$ tal que $cl_X(U_{\xi_0}) \subseteq V$. Si $\lambda \geq \xi_0$, entonces $x_\lambda \in \bigcap_{\nu \leq \lambda} cl_X(U_\nu)$, lo que quiere decir que $x_\lambda \in cl_X(U_{\xi_0}) \subseteq V$. Por construcción, la cadena $\{x_\xi : \xi \in \kappa\}$ converge a $x \in X \setminus A$. Por tanto, X es pseudoradial.

$\square$

Ahora introducimos la noción de espacio H-cerrado, esta propiedad es una generalización de la compacidad, debido a que un subconjunto compacto de un espacio de Hausdorff es cerrado. Así, cualquier compacto Hausdorff es H-cerrado. El concepto de H-cerrado fue introducido por Alexandroff y Urysohn en 1924, [3].

1.16 Definición. *Un espacio de Hausdorff X se llama H-**cerrado**, si X es cerrado en cualquier espacio de Hausdorff que lo contenga.*

Para más detalles de estos espacios, véase [33]. Una propiedad topológica similar a la compacidad numerable pero más débil es la noción de espacio débilmente compacto que a continuación se define.

1.17 Definición. *Un espacio X es **débilmente compacto** si cualquier familia localmente finita de conjuntos abiertos no vacíos es finita.*

Cabe mencionar que los espacios H-cerrados son débilmente compactos.

1.18 Definición. *Un espacio X es **disperso**, siempre que cualquier subespacio no vacío $Y \subset X$ tiene un punto aislado (con respecto a la topología relativa).*

Una herramienta útil en el estudio de los espacios dispersos es la ***descomposición de Cantor-Bendixson***. A saber,

Sea X un espacio disperso. Si tomamos

$$X_0 = \{x : x \text{ es aislado en } X\}$$

$$X_1 = \{x : x \text{ es aislado en } X \setminus X_0\}$$

$$\vdots$$

$$X_\alpha = \left\{x : x \text{ es aislado en } X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta\right\}$$

entonces llamamos ***orden de dispersión de** X* al mínimo κ tal que $X_\kappa = \emptyset$ para alguna $\kappa < |X|^+$.

1.19 Teorema ([36])**.** *Cualquier espacio T_3 y disperso es débilmente Whyburn.*

Demostración. Sean $A \subset X$ un subconjunto no cerrado y $x \in (cl_X(A) \setminus A) \cap X_\alpha$ donde α es mínimo para alguna k. Sea $Y = X \setminus \bigcup_{\beta<\alpha} X_\beta$. Como x es punto aislado de Y, existe un abierto $U \subset X$ tal que $U \cap Y = \{x\}$. Por regularidad, existe una vecindad cerrada $V \subset X$ de x tal que $V = cl_X(V) \subset U$. Entonces, si $B = V \cap A$ tenemos que $x \in cl_X(B)$ y, por la minimalidad de α, resulta que $cl_X(B) \setminus A = \{x\}$. $\square$

Cabe mencionar que la extensión de Katětov de ω (ver [17]) muestra que el teorema anterior no es cierto en la clase de espacios de Urysohn. En el Ejemplo 3.20, construiremos un espacio semiregular, disperso con orden de dispersión 2 que no es débilmente Whyburn.

1.20 Corolario ([36]). *Si X es un espacio compacto de Hausdorff y disperso, entonces X es pseudoradial.*

1.21 Corolario ([36]). *Cualquier espacio disperso T_3, es hereditariamente débilmente Whyburn.*

1.22 Proposición ([9]). *Cualquier espacio numerablemente compacto, de Hausdorff y débilmente Whyburn es secuencialmente compacto.*

Demostración. Sean X como en la hipótesis del enunciado y $\{x_n\}$ una sucesión en X. Si el rango de $\{x_n\}$ es finito, entonces $\{x_n\}$ admite una subsucesión constante y, por tanto, convergente. Si el rango de $\{x_n\}$ es infinito, pasamos a un subconjunto discreto e infinito $A \subseteq \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como X es numerablemente compacto y A no es cerrado, por hipótesis, existe $B \subseteq A$ tal que $cl_X(B) \setminus A = \{p\}$ para algún punto $p \in cl_X(A) \setminus A$, esto es, $cl_X(B) = B \cup \{p\}$ es numerablemente compacto y numerable, por consiguiente, compacto. Luego, $B \cup \{p\}$ es una sucesión convergente. $\square$

1.23 Teorema ([36]). *Sea X un espacio de Hausdorff, numerablemente compacto y de Whyburn. Entonces X es Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Supongamos que $A \subset X$ y $x \in cl_X(A) \setminus A$. Como X es de Whyburn, existe un subconjunto infinito $P \subset A$ tal que $cl_X(P) \setminus A = \{x\}$. Por el Teorema 1.14, existe una familia maximal celular γ de subconjuntos abiertos de P cuyas cerraduras no contienen a x. Luego, $\bigcup \gamma$ es densa en P

y debido a que $x \in cl_X(P)$ se tiene que $x \in cl_X(\bigcup \gamma)$. Considerando que P es de Whyburn, existe $Q \subset \bigcup \gamma$ tal que $cl_X(Q) \setminus \bigcup \gamma = \{x\}$. Sea $\gamma' = \{U \in \gamma : U \cap Q \neq \emptyset\}$. Supongamos que γ' es finito, digamos $\gamma' = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$. De modo que, $Q \subset \bigcup_{i=1}^n U_i$ y, como se tiene una unión finita, $cl_X(Q) \subseteq cl_X(\bigcup_{i=1}^n U_i) = \bigcup_{i=1}^n cl_X(U_i)$. No obstante, $x \notin \bigcup_{i=1}^n cl_X(U_i)$ y, por tanto, $x \notin cl_X(Q)$, se tiene una contradicción. Por tanto, γ' es infinito.

Para $U \in \gamma'$ tomamos $x_u \in U \cap Q$. El conjunto $B = \{x_u : U \in \gamma'\}$ es discreto infinito, por tanto no cerrado pues X es numerablemente compacto. Además, $(cl_X(B) \setminus B) \cap \bigcup \gamma = \emptyset$, pues de lo contrario existe $U' \in \gamma$ tal que contiene puntos distintos de $x_{u'}$, lo que no puede suceder porque el conjunto B es discreto. Luego, como $cl_X(Q) = Q \cup \{x\}$ se sigue que $cl_X(B) \subseteq Q \cup \{x\}$ y, por el Teorema 3.10.4 de [17], $Q \cup \{x\}$ es numerablemente compacto. De aquí $B \cup \{x\}$ es un espacio infinito numerablemente compacto y, dado que B es discreto, tiene un sólo punto no aislado x. Por tanto, $B \cup \{x\}$ es compacto y cualquier subconjunto numerable infinito de B es una sucesión que converge a x. Esto termina la prueba. □

Un espacio de Hausdorff X se llama ***espacio k***, si $A \subset X$ es cerrado cuando $A \cap K$ es cerrado para cualquier subespacio compacto K del espacio X.

1.24 Corolario ([36]). *Si X es un espacio k que es de Whyburn, entonces es Fréchet-Urysohn.*

Demostración. Sea $A \subset X$ y $x \in cl_X(A) \setminus A$. Como X es de Whyburn, existe un conjunto casi cerrado $F \subset A$ tal que $cl_X(F) \setminus A = \{x\}$. Dado que F no es cerrado, existe un compacto $K \subset X$ tal que $K \cap F$ no es cerrado y, por tanto, $cl_X(K \cap F) \setminus F = \{x\}$. Luego, K es numerablemente compacto y, por ser subespacio, es de Whyburn. Por tanto, por el Teorema 1.23, K es Fréchet-Urysohn. De esta manera existe una sucesión $S \subset K \cap F$ que a su vez está contenida en A y que converge a x. □

Los siguientes conceptos fueron introducidos y estudiados por E. Hewit en su célebre artículo de 1943, [21], entre otras cosas con el fin de construir topologías más finas (o expansiones) que una dada.

1.25 Definición. *[21] Un espacio topológico $X = (X, \tau)$ es **resoluble** si existe un subconjunto D de X tal que D y $X \setminus D$ son τ-densos en X.*

Más generalmente, adoptando la terminología introducida subsecuentemente por Ceder [14], para un número cardinal α decimos que $X = (X, \tau)$ es α-***resoluble*** si existe una familia de α subconjuntos densos y mutuamente ajenos de X. Un espacio X es llamado ***irresoluble*** si no es resoluble.

1.26 Definición. *Un espacio X denso en si mismo es* ***submaximal****, si cada subconjunto denso de X es abierto en X o equivalentemente, si cualquier subconjunto con interior vacío es cerrado y discreto.*

Obsérvese que cualquier espacio submaximal es irresoluble.

El siguiente es un procedimiento estándar para construir topologías submaximales: Supongamos que (X, τ) es un espacio (de Hausdorff) y $\mathcal{D}$ es un filtro maximal en la familia de los subconjuntos densos de X. Entonces la topología σ generada por la subbase $\tau \cup \mathcal{D}$ es submaximal y es llamada la *submaximalización* de τ. Note que σ es semiregular si y sólo si τ es semiregular y submaximal (entonces $\sigma = \tau$). Nótese que, un espacio disperso es submaximal si y sólo si tiene orden de dispersión 2.

El siguiente resultado de Bella y Yaschenko da una condición necesaria para que un espacio submaximales sea de Whyburn.

1.27 Proposición ([8])**.** *Si X es un espacio T_3 y submaximal, entonces es de Whyburn.*

Demostración. Sean $A \subset X$ y $x \in cl_X(A) \setminus A$. Entonces, $x \in cl_X(int_X(A))$ o bien $x \in cl_X(A \setminus int_X(A))$, pero debido a que $int_X(A \setminus int_X(A)) = \emptyset$ se sigue que $x \in cl_X(int_X(A))$. Como $cl_X(int_X(A)) \setminus A$ es cerrado y discreto en X, existe una vecindad W de x tal que $W \cap [cl_X(int_X(A)) \setminus A] = \{x\}$. Por regularidad podemos suponer que W es cerrado. Sea $B = W \cap int_X(A)$. Entonces, como $B \subset W$ y $B \subset int_X(A)$, se sigue que $cl_X(B) \subset cl_X(W) \cap cl_X(int_X(A))$ y, en tal caso, $cl_X(B) \setminus A \subset [cl_X(W) \cap cl_X(int_X(A))] \setminus A = \{x\}$. Por tanto, X es de Whyburn. $\square$

1.4. κ-redes

En muchas áreas de las matemáticas es muy importante la aplicación e investigación de la convergencia. Por ejemplo, en *análisis* se estudia la convergencia de sucesiones y series; en *análisis funcional* se considera la convergencia de funciones y operadores; mientras que, en las *matemáticas aplicadas* se profundiza en la convergencia de algoritmos de cálculos y en el *análisis real*, la convergencia sirve para expresar la continuidad de una función o para expresar el hecho de que un punto está cerca de un conjunto.

En general, estamos relacionados con el concepto de sucesión. No obstante, para la topología general, las sucesiones suelen ser insuficientes, como se ilustra en [11], [13], [17], [25] y [37], debido a que normalmente una topología no se determina por sus sucesiones convergentes, pero sí por sus sucesiones generalizadas, mejor conocidas como redes. Las redes fueron introducidas en 1922 por Moore y Smith en [30], pero no fue sino hasta 1937 que Birkhoff describió la convergencia en la topología general en términos de redes, en [11].

Cabe mencionar que en la literatura, algunos topólogos las llaman *super-sucesiones* debido a que dejan el nombre castellano de *red* para el concepto de *network*. Para evitar posibles confusiones, daremos la definición de lo que entendemos en este trabajo por red.

1.28 Definición. *Sea D un conjunto no vacío y $\leq$ una relación binaria en D. Se dice que $(D, \leq)$ es un* ***conjunto dirigido*** *si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $d \in D,\ d \leq d$;*
2. *Para cualesquiera $d, d', d'' \in D$, si $d \leq d'$ y $d' \leq d''$, entonces $d \leq d''$;*
3. *Para todos $d, d' \in D$ existe un $d^* \in D$ tal que $d \leq d^*$ y $d' \leq d^*$*

1.29 Definición. *Sea X un espacio topológico. Una* ***red*** *f en X es un mapeo $f : D \longrightarrow X$, donde D es un conjunto dirigido.*

Una vez que hemos aclarado cualquier posible confusión, es importante decir que una *red* tiene cardinalidad κ si su dominio tiene cardinalidad κ.

Hodel ha mostrado recientemente en [22] la utilidad de una cierta clase de redes, a las que denomina κ-redes. Una aproximación similar fue empleada por Meyer en [28].

1.30 Definición. *Una κ-**red** en X es una función $f : \kappa^{<\omega} \longrightarrow X$, donde $\kappa^{<\omega} = \{F : F$ es un subconjunto finito de $\kappa\}$ y es dirigido por $\subseteq$. La κ-red f ocasionalmente la denotaremos por $\langle x_F : F \in \kappa^{<\omega}\rangle$, donde $x_F = f(F)$ para cada $F \in \kappa^{<\omega}$.*

Nótese que el dominio de una κ-red tiene cardinalidad κ.

1.31 Definición. *Sea X un espacio, $x \in X$ y $f : \kappa^{<\omega} \longrightarrow X$ una κ-red en X.*

*a) El punto x es un **punto de acumulación** de f si dada cualquier vecindad abierta V de x y cualquier $F \in \kappa^{<\omega}$, existe $G \in \kappa^{<\omega}$ tal que $F \subseteq G$ y $f(G) \in V$.*

*b) Decimos que una κ-red f **converge a** x, si para cualquier vecindad abierta V de x existe $F \in \kappa^{<\omega}$ tal que $f(G) \in V$ para todo $G \in \kappa^{<\omega}$ con $F \subseteq G$.*

1.32 Lema ([22])**.** *Sean X un espacio y $q \in X$.*

1. *Si f es una κ-red en X y f converge a q, entonces q es un punto de acumulación de f.*
2. *Si $\chi(X, q) \leq \kappa$ y $q \in cl_X(A)$, entonces existe una κ-red g en A tal que g converge a q.*

Demostración. 1. Se sigue de la definición.

2. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una base local para q. Como $q \in cl_X(A)$, para cada $U_\alpha \in \mathcal{U}$ se tiene que $U_\alpha \cap A \neq \emptyset$. Así que elegimos un punto $x_F \in \bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha \cap A$ para cada $F \in \kappa^{<\omega}$. Luego, la κ-red g definida por $\{x_F : F \in \kappa^{<\omega}\} \subset A$ converge a q. $\square$

En topología y en muchas áreas de las matemáticas, una subred es una generalización del concepto de subsucesión para el caso de redes. A saber, si (x_α) y (y_β) son redes de conjuntos dirigidos D_1 y D_2 respectivamente, entonces (y_β) es una subred de (x_α), si existe una función monótona cofinal $H : D_1 \to D_2$ tal que $y_\beta = x_{H(\beta)}$. Dicho concepto trasladado a términos de κ-redes se define como sigue:

1.33 Definición. *Si $\kappa \geq \lambda$, una κ-red g es una **κ-subred** de una λ-red f si existe $\phi : \kappa^{<\omega} \longrightarrow \lambda^{<\omega}$ tal que $g = f \circ \phi$ y para cada $F_0 \in \lambda^{<\omega}$ existe $G_0 \in \kappa^{<\omega}$ tal que si $G \supseteq G_0$ entonces $\phi(G) \supseteq F_0$. Si $\lambda = \kappa$, un mapeo ϕ con las propiedades anteriores será llamado un **mapeo κ-red**.*

1.34 Lema. *[22] Sea X un espacio. Si f es una κ-red en X y p es un punto de acumulación de f, entonces existe una λ-subred g de f que converge a p (para alguna λ).*

Demostración. Sean $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$ una base local para p y f una κ-red en X. Como p es punto de acumulación de f, se sigue que, para cada $F \in \lambda^{<\omega}$ existe $\phi(F) \in \kappa^{<\omega}$ tal que $F \cap \kappa \subseteq \phi(F)$ y $g(F) = f(\phi(F)) \in \bigcap\{U_\alpha : \alpha \in F\}$. Sea W un abierto de p. Como $\mathcal{U} = \{\bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha : F \in \lambda^{<\omega}\}$ es una base local de p, existe $G_0 \in \lambda^{<\omega}$ tal que $\bigcap_{\alpha \in G_0} U_\alpha \subset W$. Luego, para cada $F \supset G_0$ se tiene que $\bigcap_{\alpha \in F} U_\alpha \subseteq \bigcap_{\alpha \in G_0} U_\alpha$ y, en consecuencia que, $g(F) \in \bigcap_{\alpha \in G_0} U_\alpha \subset W$. Por tanto, g converge a p. □

1.35 Definición. *Sea $\phi : \lambda^{<\omega} \longrightarrow \lambda^{<\omega}$ un mapeo λ-red. Se dice que ϕ es:*

*a) **expansivo** si para cada $F \in \lambda^{<\omega}$, $\phi(F) \supseteq F$;*

*b) **monótono** si $F \subseteq G$ implica que $\phi(F) \subseteq \phi(G)$.*

Nótese que una composición de mapeos λ-red (monótonos, expansivos) es un mapeo λ-red (monótono, expansivo).

Ahora consideramos la relación entre convergencia y puntos de acumulación de sucesiones, redes y κ-redes.

1.36 Teorema ([22]). *Sean X un espacio y $p \in X$. Para cualquier ω-red $f : \omega^{<\omega} \longrightarrow X$ existe una sucesión $g : \omega \longrightarrow X$ que es una subred de f y que satisface lo siguiente:*

(1) *Si $f \longrightarrow p$, entonces $g \longrightarrow p$;*

(2) *Si p es un punto de acumulación de g, entonces p es un punto de acumulación de f.*

Demostración. Definimos $\phi : \omega \longrightarrow \omega^{<\omega}$ por $\phi(n) = \{0, 1, \dots, n\}$ para cada $n \in \omega$. Entonces $g = f \circ \phi$ es una subred de f. En efecto, sea $F = \{a_0, a_1, \dots, a_m\} \in \omega^{<\omega}$ donde $a_j < a_{j+1}$ si $j \in \{0, \dots, m-1\}$. Obsérvese que $k \geq a_m$ implica que

$$\phi(k) = \{0, 1, \dots, k\} \supseteq \{a_0, a_1, \dots, a_m\}.$$

Las propiedades (1) y (2) son consecuencia de que g es una subred de f. $\square$

Ahora analizaremos hasta qué punto las redes se pueden limitar a κ-redes en una teoría general de convergencia y puntos de acumulación. Sea $(D, \leq)$ un conjunto dirigido; nótese que la relación $\leq$ no es necesariamente antisimétrica y en tal caso, se puede definir la relación de equivalencia $\sim$ en $D \times D$ como sigue:

$$d \sim e \quad \Leftrightarrow \quad d \leq e \text{ y } e \leq d.$$

Entonces $(D/\sim, \preceq)$ definido por $[d] \preceq [e] \Leftrightarrow d \leq e$ es un conjunto dirigido en que $\preceq$ es antisimétrico.

1.37 Lema ([22])**.** *Sea X cualquier espacio y $f : (D, <) \longrightarrow X$ una red en X; para cada $[d] \in D/\sim$ escogemos $e_d \in [d]$ y definimos $\phi : D/\sim \longrightarrow D$ por $\phi([d]) = e_d$. Entonces, $f \circ \phi$ es una subred de f.*

Demostración. Dado $d_0 \in D$, si $[c] \geq [d_0]$ entonces $\phi([c]) = e_c \geq d_0$. Por tanto, $f \circ \phi$ es una subred de f. $\square$

En [22], se muestra que si f es una red de cardinalidad κ que converge a p, entonces existe en el rango de f una κ-red que converge a p. Lo que no está explícitamente afirmado en el artículo es el siguiente resultado.

1.38 Lema. *Si $f : (D, \ll) \longrightarrow X$ es una red en X de cardinalidad κ que converge a p, entonces existe una κ-subred de f que converge a p.*

Demostración. Sea $f : (D, \ll) \longrightarrow X$ es una red en X de cardinalidad κ que converge a p. Para simplificar la notación, identificamos D con κ y definimos $\psi : \kappa^{<\omega} \to D$ por $\psi(F) = d$, donde d es elegido de tal manera que $e \ll d$ para todo $e \in F$.

Para corroborar que ψ es una subred (y, en consecuencia que converge a p), sea $e \in D$ arbitrario. Entonces, si $\{e\} \subseteq G$ sucede que $\psi(G) \gg e$. $\square$

1.39 Lema ([22]). ***(Propiedad de expansión)*** *Sea X cualquier espacio; si $\varphi : \lambda^{<\omega} \longrightarrow X$ es una λ-red en X, entonces para cada $\kappa \geq \lambda$ existe una κ-subred $\psi : \kappa^{<\omega} \longrightarrow X$ de φ.*

Demostración. Definimos $H : \kappa^{<\omega} \longrightarrow \lambda^{<\omega}$ por $H(F) = F \cap \lambda$ para cada $F \in \kappa^{<\omega}$. Dado $G_0 \in \kappa^{<\omega}$, si $G_0 \subseteq F \in \kappa^{<\omega}$ entonces $H(F) = F \cap \lambda \supseteq G_0 \cap \lambda = G_0$. $\square$

1.40 Teorema ([22]). *Sean X un espacio y κ un cardinal infinito. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(1) Cada κ-red en X tiene un punto de acumulación;

(2) Cada λ-red en X con $\lambda \leq \kappa$ tiene un punto de acumulación;

(3) Cada red $f : D \longrightarrow X$ con $|D| \leq \kappa$ tiene un punto de acumulación.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2). Sea $h : \lambda^{<\omega} \longrightarrow X$ una λ-red con $\lambda \leq \kappa$. Por el Lema 1.39, existe una κ-subred $\psi : \kappa^{<\omega} \longrightarrow X$ y, por *(1)*, ψ tiene un punto de acumulación x. En consecuencia, x es punto de acumulación de h.

(2) $\Rightarrow$ (3). Sea $f : D \longrightarrow X$ una red con $|D| = \lambda \leq \kappa$. Consideremos $\phi : D/\sim \longrightarrow D$ la subred obtenida de f como en el Lema 1.37 y, sea $g : \lambda^{<\omega} \longrightarrow X$ la λ-subred obtenida de ϕ como en el Lema 1.38. Así que g es una λ-subred de f. Por hipótesis, si p es un punto de acumulación de g entonces p es punto de acumulación de f.

(3) $\Rightarrow$ (1). Sea $f : \kappa^{<\omega} \longrightarrow X$ una κ-red en X. En particular, como f es una red de cardinalidad κ, se sigue de (3), que f tiene un punto de acumulación. $\square$

Nótese que se pueden utilizar κ-redes en el lugar de sucesiones en las definiciones de secuencial y de Fréchet. Las siguientes definiciones brindan generalizaciones de los conceptos de espacios de Fréchet y secuenciales. Esto ya fue hecho por Meyer en [28], con redes cuyos conjuntos dirigidos tienen cardinalidad a lo más κ.

1.41 Definición. *Un espacio X es* ***κ-Fréchet****, si para cada subconjunto $A \subset X$ y para cualquier $x \in cl_X(A) \setminus A$ existe una red de cardinalidad a lo más κ -o equivalentemente, para alguna $\lambda \leq \kappa$ existe una λ-red -en A que converge a x.*

1.42 Definición. *Un espacio X es κ-**red**, si para cualquier subconjunto no cerrado $A \subset X$ y para algún $x \in cl_X(A) \setminus A$ existe una red de cardinalidad a lo más κ -o equivalentemente, para alguna $\lambda \leq \kappa$ existe una λ-red -en A que converge a x.*

1.43 Definición. *Un subconjunto A es κ-**red cerrado** si $\langle x_F : F \in \kappa^{<\omega} \rangle$ es una κ-red en A que converge a q, entonces $q \in A$.*

Luego, un espacio X es κ-red si cualquier subconjunto κ-red cerrado es cerrado.

Un ejemplo clásico de un espacio secuencial que no es de Fréchet, es el *espacio de Arens-Franklin*, (ver [5] y [18]). Una generalización de tal ejemplo se describe a continuación:

Sea
$$X = [\kappa \times (\kappa \cup \{\kappa\})] \cup \{p\},$$
para cada $\alpha < \kappa$, sean $C_\alpha = \{(\alpha, \beta) : 0 \leq \beta < \kappa\}$ una columna en X y $C'_\alpha = C_\alpha \cup \{(\alpha, \kappa)\}$. La topología en X se describe como sigue:

1. Cada punto (α, β) con $0 \leq \beta < \kappa$ es aislado;
2. $\{C'_\alpha \setminus D : D \subset C_\alpha$ y $|D| < \kappa\}$ es una base local para (α, κ);
3. La topología de p es la más fina para que $\{(\alpha, \kappa) : \alpha < \kappa\}$ converja a p.

Analizando varios casos, se concluye que X es un espacio k-red que no es k-Fréchet (ver Ejemplo 3 de [22]).

Al final del capítulo 2, estudiaremos este ejemplo con mayor detenimiento con el propósito de ilustrar que, existen espacios de Hausdorff, numerables, que no son de Whyburn y que no son κ-Fréchet para determinadas κ's.

1.44 Proposición. *(1) X es un espacio secuencial si y sólo si X es un espacio ω-red.*

(2) X es un espacio de Fréchet si y sólo si X es un espacio ω-Fréchet.

(3) Si X es un espacio λ-Fréchet (respectivamente, un espacio λ-red) y $\lambda \leq \kappa$, entonces X es κ-Fréchet (respectivamente, un espacio κ-red).

(4) Para todo κ, $\chi(X) \leq \kappa$ implica que X es κ-Fréchet, de manera que, X es un espacio κ-red.

Demostración. (1) y (2), se siguen del hecho de que toda sucesión en un conjunto es una red en dicho conjunto y ω es el conjunto dirigido en cuestión.

(3) Sean $\lambda \leq \kappa$, $A \subset X$ no cerrado y $x \in cl_X(A) \setminus A$. Por hipótesis, existe una red f de cardinalidad a lo más λ que converge a x. Por los Lemas 1.38 y 1.39, existe una κ-red de f que converge a x. Análogamente para espacios λ-red.

(4) Sean $\chi(X) \leq \kappa$, $A \subset X$ y $p \in cl_X(A) \setminus A$ arbitrarios. Por el Lema 1.32, existe una κ-red g en A que converge a p, de donde, X es κ-Fréchet. $\square$

El conjunto A junto con los límites de todas las κ-redes cuyo rango está en A es llamado la **cerradura κ-red** de A, denotada por $cl^{\kappa}(A)$.

1.45 Proposición. *(1) Para cada $A \subseteq X$, se tiene que $A \subseteq cl^{\kappa}(A) \subseteq cl_X(A)$.*

(2) A es κ-red cerrado si y sólo si $cl^{\kappa}(A) = A$.

(3) Un espacio X es κ-red siempre que un conjunto A es cerrado si y sólo si $A = cl^{\kappa}(A)$.

(4) Un espacio X es κ-Fréchet si y sólo si para cada $A \subseteq X$, $cl^{\kappa}(A) = cl_X(A)$.

Demostración. (1) Se sigue de la definición de $cl^{\kappa}(A)$.

(2) $A \subset X$ es un subespacio κ-cerrado $\Leftrightarrow$ para cualquier κ-red f en A que converge a un punto p, se tiene que $p \in A \Leftrightarrow A$ contiene a los puntos límites de las redes cuyo rango está en $A \Leftrightarrow cl^{\kappa}(A) = A$.

(3) Sea $A \subset X$ y $A = cl_X(A)$. Como Tomemos una κ-red f en A que converge a x. Luego $x \in A$, pues de lo contrario, $x \in X \setminus cl_X(A)$ y x no sería punto límite de f. Ahora, supongamos que toda κ-red en A que sea convergente, converge en A. Veamos que $A = cl_X(A)$. Si supongamos que A es no cerrado y dado que X es un espacio κ-red, existe de una κ-red en A que converge a un punto $x \in cl_X(A) \setminus A$, lo que es una contradicción. De donde, $A = cl_X(A)$. Por tanto, A es un espacio κ-red cerrado que es cerrado.

(4) X es κ-Fréchet $\Leftrightarrow$ para cualquier $A \subset X$ no cerrado y para cualquier $x \in cl_X(A) \setminus A$, existe una κ-red en A que converge a $x \Leftrightarrow cl_X(A)$ es el conjunto A junto con los puntos límites de redes cuyo rango está en $A \Leftrightarrow cl^{\kappa}(A) = cl_X(A)$. □

Las siguientes definiciones las ocuparemos al final del capítulo 2.

1.46 Definición. *a) El **carácter de red** de X es el mínimo cardinal κ tal que X es un espacio κ-red, este número cardinal es denotado por $\sigma(X)$.*

*b) El **carácter de red de Fréchet** de X es el mínimo cardinal λ tal que X es λ-Fréchet y será denotado por $\sigma_F(X)$.*

Obsérvese que, $\sigma(X) \leq \sigma_F(X) \leq \chi(X)$.

1.5. Dos Cardinales Importantes

En esta subsección se definen algunos cardinales importantes asociados con ω que en general son vistos desde la perspectiva de la Teoría de Conjuntos.

Dados dos conjuntos infinitos A y B decimos que $A \subset^* B$ si $A \setminus B$ es finito. Si $f, g \in \omega^{\omega}$ entonces $f <^* g$, si existe $\kappa \in \omega$ tal que $f(n) < g(n)$ para toda $n \geq \kappa$.

1.47 Definición. *Un conjunto $\mathcal{F} \subseteq \omega^{\omega}$ es **acotado** si existe un $g \in \omega^{\omega}$ tal que $f \leq^* g$ para cualquier $f \in \mathcal{F}$.*
El símbolo $\mathfrak{b}$ denotará la mínima cardinalidad de una familia no acotada.

1.48 Lema. *Todo subconjunto numerable de $(\omega^{\omega}, <^*)$ es acotado.*

Demostración. Supongamos que $\{f_m : m \in \omega\}$ es una familia numerable. Definimos $f : \omega \to \omega$ por $f(n) = \sup\{f_0(n), \ldots, f_n(n)\} + 1$. Entonces, $f_n(m) < f(m)$ para cada $m \geq n$. Por tanto, $f_n <^* f$ para cada $n \in \omega$. □

1.49 Definición. *Una familia* $\mathcal{F} \subseteq \omega^\omega$ *es* ***dominante****, si para cualquier* $f \in \omega^\omega$ *existe* $g \in \mathcal{F}$ *tal que* $f \leq^* g$.
El símbolo $\mathfrak{d}$ *denotará la mínima cardinalidad de una familia dominante.*

1.50 Observación. *Cualquier familia dominante es no acotada.*

1.51 Corolario. *En ZFC,* $\omega < \mathfrak{b} \leq \mathfrak{d} \leq \mathfrak{c} = 2^\omega = \omega^\omega$

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema 1.48 y de la Observación 1.50. □

Capítulo 2

Redes y Compacidad

El concepto de espacio compacto apareció como resultado de la generalización de algunas propiedades importantes del espacio de los números reales y, actualmente, son una de las clases más importantes de espacios topológicos. Ellos son definidos como espacios con la propiedad de que cualquier cubierta de conjuntos abiertos contiene una subcubierta finita.

En términos de κ-redes, el concepto de compacidad equivale a decir que para toda κ, cualquier κ-red tiene un punto de acumulación. Entre los resultados importantes que se siguen cumpliendo en este contexto, encontramos el Teorema de Tychonoff, que dice que cualquier producto de espacios compactos es compacto.

En el presente capítulo, se estudiarán dos clases de espacios afines a la compacidad, a saber, los espacios *inicialmente κ-compactos* y los espacios *fuertemente κ-compactos*, los primeros ya han sido estudiados en [35]. En la última sección, estudiamos el comportamiento de los espacios de Whyburn en espacios numerables y κ-Fréchet para determinadas κ's.

2.1. Espacios Inicialmente κ-compactos y Espacios Fuertemente κ-compactos

Recordemos que un espacio X es *numerablemente compacto* si cualquier cubierta abierta numerable de X tiene una subcubierta finita. Así cualquier espacio compacto es numerablemente compacto. Dicho esto, un espacio numerablemente compacto se puede generalizar a cardinales superiores a través de la siguiente definición.

2.1 Definición. *Un espacio topológico X es* ***inicialmente κ-compacto*** *si cualquier cubierta abierta $\mathcal{U}$ de X con $|\mathcal{U}| \leq \kappa$ tiene una subcubierta finita.*

2.2 Teorema. *[35] Las siguientes condiciones son equivalentes:*

i) Un espacio X es inicialmente κ-compacto.

ii) Cualquier κ-red (o equivalentemente, cualquier red de cardinalidad κ) tiene un punto de acumulación.

iii) Cada κ-red (o bien, cada red de cardinalidad κ) tiene una λ-subred convergente para algún cardinal λ.

En el caso de la compactación de Stone-Čech de los naturales, $\beta\omega$, λ es necesariamente más grande que ω. Este hecho motiva la siguiente definición, la cual es un caso especial del concepto de *secuencialmente compacto* (esto es, cualquier sucesión tiene una subsucesión convergente).

2.3 Definición. *Un espacio es* ***fuertemente κ-compacto*** *si para toda $\lambda \leq \kappa$, cada red de cardinalidad λ tiene una subred convergente de cardinalidad a lo más λ.*

Las redes y los filtros son los dos enfoques principales para una teoría general de convergencia. Cada teoría tiene sus propios defensores. En [7], Bartle analiza ambas teorías y exhibe las ventajas de una sobre otra. Señala que las redes son más intuitivas debido a que tienen una estrecha relación con las sucesiones, mientras que los filtros, tienen una cierta "elegancia algebriaca y son bastante adecuados para ciertos argumentos transfinitos, ya que gozan de una singularidad que no poseen las redes". Es por ello que nos dimos a la tarea de buscar una equivalencia de espacio fuertemente κ-compacto en términos de filtros.

2.4 Teorema. *X es fuertemente κ-compacto si y sólo si para cada $\lambda \leq \kappa$, cada base de filtro de cardinalidad λ tiene un filtro más fino de cardinalidad λ que converge.*

Demostración. Sea $\mathcal{B}$ una base de filtro de cardinalidad $\lambda \leq \kappa$ en X y supongamos que X es fuertemente κ-compacto. Para cada $A \in \mathcal{B}$ escogemos $x_A \in A$. En el conjunto $D = \{(x_A, A) : A \in \mathcal{B}\}$ de cardinalidad λ, introducimos un orden $\leq$ como sigue: $(x_A, A) \leq (x_B, B)$ si y sólo si $B \subset A$. Entonces $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido. Sea $f : (D, \leq) \longrightarrow X$ una red de cardinalidad λ en X definida por $f((x_A, A)) = x_A$. Por hipótesis, existe una subred $f \circ \phi : E \longrightarrow X$ de cardinalidad λ que converge a algún $q \in X$, donde $\phi : E \longrightarrow D$. Entonces, consideramos la base de filtro

$$\mathcal{B}' = \{\{f \circ \phi(e) : e \geq e_0\} : e_0 \in E\}$$

de cardinalidad λ que converge a q. Por definición de $f \circ \phi$, se sigue que para cada $d_0 \in D$ existe $e_0 \in E$ tal que $\phi(e) \geq d_0$ para cada $e \geq e_0$. Lo que significa que $\{\phi(e) : e \geq e_0\} \subset \{d : d \geq d_0\}$. De manera que, para cada $\{f(d) : d \geq d_0\} \in \mathcal{B}$ existe $\{f \circ \phi(e) : e \geq e_0\} \in \mathcal{B}'$ tal que $\{f \circ \phi(e) : e \geq e_0\} \subset \{f(d) : d \geq d_0\}$. Por tanto, el filtro generado por $\mathcal{B}$ está contenido en el filtro generado por $\mathcal{B}'$.

Ahora supongamos que, para cada $\lambda \leq \kappa$, cada base de filtro de cardinalidad λ tiene un filtro más fino de cardinalidad λ que converge.

Sea $h : (D, \leq) \longrightarrow X$ una red en X de cardinalidad λ, para algún $\lambda \leq \kappa$. La familia $\mathcal{B} = \{\{h(d) : d \geq d_0\} : d_0 \in D\}$ es una base de filtro de cardinalidad λ. Luego, existe un filtro $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}$ que refina a $\mathcal{B}$ con base $\mathcal{B}'$ de cardinalidad λ que converge a un punto $p \in X$.

Definimos $\phi : D \times \mathcal{B}' \longrightarrow D$ por $\phi((d, B')) = d'$ donde $d' \geq d$ y $h(d') \in B'$. En efecto, ϕ está bien definida puesto que al estar $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}_{\mathcal{B}'}$, se tiene que para cada $B \in \mathcal{B}$ existe $U_B \in \mathcal{B}'$ tal que $U_B \subset B$, de modo que $\{h(e) : e \geq d\} \cap U_B \neq \emptyset$ para cada $e \in D$.

Afirmamos que $h \circ \phi$ es una subred de h. Sea $e \in D$ arbitrario. Entonces existe $(e, B') \in D \times \mathcal{B}'$ tal que si $(e, B') \leq' (d, B')$ entonces $\phi((d, B')) = d' \geq d \geq e$.

Dado que $\mathcal{F}_{\mathcal{B}'}$ converge a p, $\mathcal{B}'$ converge a p. Luego, cada vecindad U de p pertenece a $\mathcal{B}'$. Entonces $\phi((d, U)) = d' \geq d$ donde $h(d') \in U$. Así que, $\{h \circ \phi(d, U) : d' \geq d\} = \{h(d') : d' \geq d\} \subset U$. Puesto que U es arbitraria, se concluye que $h \circ \phi$ converge a p.

$\square$

Por un argumento muy similar al del *Teorema de expansión*, 1.39, la red tiene una subred convergente de cardinalidad igual a λ.

2.5 Teorema. *Un espacio es fuertemente κ-compacto si y sólo si para cada $\lambda \leq \kappa$, cualquier λ-red tiene una λ-subred convergente.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Lema 1.38 y de la definición de fuertemente κ-compacto. $\square$

Como cualquier red numerable tiene una subred que es una sucesión, un espacio es fuertemente ω-compacto si y sólo si es secuencialmente compacto.

El espacio $\beta\omega$ no es fuertemente κ-compacto para ninguna κ, mientras que el ordinal ω_2 con la topología del orden es fuertemente ω_1-compacto pero no es fuertemente ω_2-compacto.

2.6 Lema. *Si X es un espacio inicialmente κ-compacto y $\chi(X) \leq \kappa$, entonces cada red en X de cardinalidad a lo más κ tiene una subred convergente de cardinalidad a lo más κ.*

Demostración. Supongamos que $f : (D, \leq) \longrightarrow X$ es una red en X de cardinalidad a lo más κ, definida por $f(d) = x_d$ para cada $d \in D$. Como X es inicialmente κ-compacto, f tiene un punto de acumulación x_0. Sea $\mathcal{B}$ una base local de x_0 de cardinalidad a lo más κ. Consideremos

$$E = \{(d, U) \,:\, d \in D,\ \ U \in \mathcal{B} \ \text{ y } \ x_d \in U\}$$

y definimos la dirección por

$$(d_1, U_1) \ll (d_2, U_2) \ \text{ si y sólo si } \ d_1 \leq d_2 \ \text{ y } \ U_1 \supseteq U_2.$$

Nótese que $(E, \ll)$ es un conjunto dirigido. Definimos $g : E \to X$ por $g((d, U)) = x_d \in U$. Veamos que g es una subred de f. Para cada $d \in D$, dado $U \in \mathcal{B}$ y existe $d^* \in D$ con $d \leq d^*$ tal que $x_{d^*} \in U$. Luego, $(d^*, U) \in E$ y para cada $(d', V) \in E$ con $(d^*, U) \ll (d', V)$ se tiene que $g((d', V)) = x_{d'}$ y $d \leq d'$. Puesto que para cada $U \in \mathcal{B}$, f está frecuentemente en U, existe $d \in D$ tal que $x_d \in U$. De manera que, $(d, U) \in E$ y para cada $(d', V) \in E$ donde $(d, U) \ll (d', V)$, se tiene que $g((d', V)) = x_{d'} \in V \subset U$. Por tanto, g es una subred de f de cardinalidad a lo más κ que converge a x_0. $\square$

Un corolario inmediato del lema previo es el siguiente resultado conocido:

2.7 Corolario. *Cada espacio primero numerable y numerablemente compacto es secuencialmente compacto.*

Sin embargo, si κ es no numerable no se puede concluir del lema previo que el espacio es fuertemente κ-compacto. Un contraejemplo importante es el espacio $\beta\omega$, pues es numerablemente compacto, tiene carácter $\mathfrak{c}$ y no es fuertemente κ-compacto para ninguna κ. Por tanto, se tiene el siguiente resultado:

2.8 Corolario. *Si X es un espacio inicialmente κ^+-compacto (en particular, si X es compacto), fuertemente κ-compacto y $\chi(X) \leq \kappa^+$, entonces X es fuertemente κ^+-compacto.*

Los siguientes resultados, muestran algunas propiedades básicas:

2.9 Lema. *Cualquier subespacio cerrado de un espacio fuertemente κ-compacto es fuertemente κ-compacto.*

Demostración. Sean X fuertemente κ-compacto y Y un subconjunto cerrado de X. Si $\lambda \leq \kappa$ y $f : D \longrightarrow Y$ es una red en Y con $|D| = \lambda$, se tiene por hipótesis que existe una subred $f \circ H : E \longrightarrow Y$ de f, donde $H : E \longrightarrow D$ y $|E| \leq \lambda$, que converge a un punto p. Como Y es cerrado en X, tenemos que $p \in Y$. Por tanto, Y es fuertemente κ-compacto.

□

2.10 Lema. *Imágenes continuas de espacios fuertemente κ-compactos son fuertemente κ-compactas.*

Demostración. Sean X y Y espacios topológicos, $H : X \longrightarrow Y$ una función continua y suprayectiva. Para $\lambda \leq \kappa$, sea $g : D \longrightarrow H(X)$ una red de cardinalidad λ en Y definida por $g(d) = y_d$ para cada $d \in D$. Como H es suprayectiva, para cada $d \in D$ existe $x_d \in X$ tal que $H(x_d) = y_d$ y definimos $f : D \longrightarrow X$ por $f(d) = x_d$. Por hipótesis, existe una subred $f \circ J : E \longrightarrow X$ donde $J : E \longrightarrow D$, definida por $f \circ J(d) = x_{J(d)}$ para cada $d \in D$ que converge a un punto $x \in X$. Luego, como H es continua, $(H(x_{J(d)}))_{d\in E}$ converge a $H(x) \in Y$. Por tanto, Y es fuertemente κ-compacto.

□

Dados dos espacios de Hausdorff X y Y, una función continua y supra-yectiva $f : X \longrightarrow Y$ se llama pseudoabierta, si para todos $y \in Y$ y U abierto en X tal que $U \supset f^{-1}(y)$ se tiene que $y \in int_Y(f(U))$.

2.11 Lema. *Sea $H : X \longrightarrow Y$ una función pseudoabierta entre espacios topológicos. Si $y \in Y$ y $B \subset Y$ son tales que $y \in cl_Y(B)$, entonces $H^{-1}(y) \cap cl_X(H^{-1}(B)) \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos lo contrario; entonces, para el conjunto $U = X \setminus cl_X(H^{-1}(B))$ tenemos que $U \cap H^{-1}(B) = \emptyset$ y, en consecuencia, $H^{-1}(y) \subset U$. Como H es pseudoabierta, se tiene que $y \in int_Y((H(U)))$. Luego, como $y \in cl_Y(B)$ se sigue que $int_Y(H(U)) \cap B \neq \emptyset$, implica que $H(U) \cap B \neq \emptyset$, lo que es una contradicción. Por tanto, $H^{-1}(y) \cap cl_X(H^{-1}(B)) \neq \emptyset$. $\square$

2.12 Teorema. *Si X es un espacio κ-Fréchet y $H : X \longrightarrow Y$ es una función pseudoabierta, entonces el espacio Y es κ-Fréchet.*

Demostración. Sean $y \in Y$ y $B \subset Y$ tales que $y \in cl_Y(B)$. Por el Lema 2.11, podemos tomar un punto $x \in H^{-1}(y) \cap cl_X(H^{-1}(B))$. Considerando que X es κ-Fréchet, existe una red de cardinalidad a lo más κ, $f : D \longrightarrow H^{-1}(B)$ definida por $f(d) = x_d$ para cada $d \in D$ en $H^{-1}(B)$, que converge a x. Luego, por la continuidad de H, se tiene que $(H(x_d))_{d \in D} \subset B$ converge a $H(x) = y$. Por tanto, Y es κ-Fréchet. $\square$

2.13 Definición. *Un espacio X es **C_κ-cerrado** si cualquier subconjunto fuertemente κ-compacto de X es cerrado.*

2.14 Proposición. *Si X es fuertemente κ-compacto y C_κ-cerrado, entonces X es un espacio κ-red.*

Demostración. Sea A un subconjunto no cerrado de X. Por hipótesis, A no es fuertemente κ-compacto, así que existe una red f en A de cardinalidad $\lambda \leqslant \kappa$ que no tiene subredes convergentes de cardinalidad a lo más λ. Como un cerrado en un espacio fuertemente κ-compacto es fuertemente κ-compacto, $cl_X(A)$ es fuertemente κ-compacta. De manera que, existe una subred g de f de cardinalidad a lo más λ que converge a algún $x \in cl_X(A) \setminus A$, esto se debe a que f no tiene subredes convergentes de cardinalidad a lo más λ en A. Por tanto, X es un espacio κ-red. $\square$

2.15 Proposición. *Si X es un espacio de Hausdorff, Whyburn e inicialmente κ-compacto y cualquier subconjunto inicialmente κ-compacto de X es cerrado, entonces X es un espacio κ-Fréchet.*

Demostración. Sea $A \subset X$ y $x \in cl_X(A) \setminus A$. Como X es de Whyburn, existe $B \subset A$ tal que $cl_X(B) \setminus A = \{x\}$. Luego, $C = cl_X(B) \setminus \{x\}$ no es cerrado y, por tanto, no es inicialmente κ-compacto. Entonces existe una red $f : D \longrightarrow C$ de cardinalidad a lo más κ en C que no tiene puntos de acumulación en C. Como X es inicialmente κ-compacto, $cl_X(B)$ es inicialmente κ-compacto, por ser cerrado en X. Así que la red f tiene un punto de acumulación en $cl_X(B)$. En consecuencia, x es el único punto de acumulación de f en $cl_X(B)$.

Ahora, sólo falta corroborar que f converge a x. Supongamos lo contrario. Entonces existe una vecindad abierta V de x en X tal que f no está eventualmente en V. Obsérvese que $cl_X(B) \setminus V$ es inicialmente κ-compacto, por ser cerrado en $cl_X(B)$. Así que existe una λ-subred convergente g de f tal que $Im(g) \subset cl_X(B) \setminus V$. Luego, x no es punto de acumulación de g. Puesto que g es una λ-subred de f y x es el único punto de acumulación de f en $cl_X(B)$, se sigue que g no tiene puntos de acumulación en $cl_X(B)$. Esto contradice la definición de g y por lo tanto, X es κ-Fréchet. $\square$

2.16 Teorema. *Si X es un espacio en que para cada punto no aislado $p \in X$, $t(p, X) = \chi(p, X)$, entonces X es fuertemente κ-compacto si y sólo si es inicialmente κ-compacto.*

Demostración. La necesidad es inmediata. Supongamos que X es inicialmente κ-compacto y $f : D \longrightarrow X$ es una red de cardinalidad $\lambda \leq \kappa$ en X. Si p es un punto de acumulación de f y f está frecuentemente en $\{p\}$, entonces f tiene una subred que converge a p. En el otro caso, tenemos que $t(p, X) \leq \lambda$, por lo que existe una base local $\mathcal{B}$ de p de cardinalidad a lo más λ. Sea $\mathcal{P} = \{(d, U) : d \in D, U \in \mathcal{B} \text{ y } f(d) \in U\}$ con dirección $(d_1, U_1) \leq (d_2, U_2)$ si y sólo si $d_1 \leq d_2$ y $U_1 \supseteq U_2$. Luego, procediendo como en la prueba del Lema 2.6, la red $g : \mathcal{P} \longrightarrow X$ definida por $g((d, U)) = f(d)$ es una subred de f de cardinalidad λ que converge a p. $\square$

2.17 Corolario. *Un espacio primero numerable es fuertemente κ-compacto si y sólo si es inicialmente κ-compacto.*

Recordemos que un espacio *ordenado generalizado* (GO) es un conjunto linealmente ordenado $(X,<)$ cuya topología está generada por intervalos (de cualquier tipo). La compacidad numerable y la compacidad secuencial son equivalentes en la clase de los espacios GO y, aunque un espacio GO, $(X,<,\tau)$, no necesariamente satisface la hipótesis del Teorema 2.16, resulta que para cada $p \in X$ no aislado en $[p,\rightarrow)$, se cumple que $t(p,(p,\rightarrow)) = \chi(p,[p,\rightarrow))$. Similarmente para $(\leftarrow,p]$. Dicho resultado se extiende como sigue:

2.18 Teorema. *Un espacio GO es fuertemente κ-compacto si y sólo si es inicialmente κ-compacto.*

Demostración. La necesidad es inmediata. Para la suficiencia, sean $(X,<,\tau)$ un espacio GO y $p \in X$. Supongamos que $f : D \longrightarrow X$ es una red de cardinalidad $\lambda \leq \kappa$ en X y p es un punto de acumulación de f que no está en el rango de f. Entonces f está frecuentemente en $(p,\rightarrow)$ o está frecuentemente en $(\leftarrow,p)$. Sea $q \neq p$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $q \in (p,\rightarrow)$. Dada la red f, definimos una nueva red $g : D \longrightarrow X$ como sigue:

$$g(d) = \begin{cases} f(d) & si\ f(d) > p \\ q & si\ f(d) < p. \end{cases}$$

Veamos que p es punto de acumulación de g. En efecto, como p es punto de acumulación de f, se tiene que para cualquier vecindad U de p y cualquier $d_0 \in D$ existe $d \leq d_0$ tal que $f(d) \in U$. Luego, para cualquier $d_0 \in D$, existe $d \leq d_0$ tal que $g(d) = f(d) \in U$ pues $f(d) > p$. Por tanto, p es punto de acumulación de g.

Por último, como $t(p,(p,\rightarrow)) = \chi(p,[p,\rightarrow))$, podemos aplicar el Teorema 2.16, para concluir que X es fuertemente κ-compacto. $\square$

En [6], Baker mostró que la *compacidad numerable y la compacidad secuencial son equivalentes en la clase de los espacios dispersos* T_3. El siguiente teorema es una generalización del resultado.

2.19 Teorema. *Si X es un espacio T_3, inicialmente κ-compacto y disperso, entonces X es fuertemente κ-compacto.*

Demostración. Es suficiente mostrar que cualquier punto en X tiene una vecindad que es fuertemente κ-compacta, debido a que cualquier red de cardinalidad a lo más κ en X tiene un punto de acumulación p, porque X es inicialmente κ-compacto, y si p tiene una vecindad fuertemente κ-compacta, entonces en dicha vecindad hay una subred de cardinalidad a lo más κ de la red original que converge a p. Sea

$$Y = \{x \in X : \text{ninguna vecindad de } x \text{ en } X \text{ es fuertemente } \kappa\text{-compacta}\}.$$

Mostraremos que $Y = \emptyset$. Supongamos lo contrario. Como X es disperso, existen $y \in Y$ y un abierto U de y en X tales que $U \cap Y = \{y\}$. Puesto que X es un espacio T_3, existe una vecindad abierta V de y tal que $cl_X(V) \subset U$; de manera que, $cl_X(V) \cap Y = \{y\}$. Mostremos que $cl_X(V)$ es fuertemente κ-compacto. Supongamos que $f : (D, \leq) \longrightarrow cl_X(V)$ es una red en $cl_X(V)$ de cardinalidad a lo más κ.

Si f converge a y, entonces cualquier subred de f también converge a y. Entonces, supongamos que f no converge a y. Como $cl_X(V)$ es inicialmente κ-compacta, f tiene un punto de acumulación $z \in cl_X(V)$; si $z \neq y$ y, como z tiene una vecindad fuertemente κ-compacta, entonces en dicha vecindad hay una subred de cardinalidad a lo más κ de f que converge a z. Así que podemos suponer que y es un punto de acumulación de f. De manera que, existe una vecindad abierta $W \subseteq cl_X(V)$ de y tal que f está frecuentemente en $cl_X(V)\backslash cl_X(W)$. Podemos definir $D_V = \{d \in D : f(d) \in cl_X(V)\backslash cl_X(W)\}$ con la relación $\leq$ heredada de D. Luego, $(D, \leq)$ es un conjunto dirigido y, si $id_{D_V} : D_V \longrightarrow D$ denota la función identidad, entonces $g = f \circ id_{D_V}$ es una subred de f de cardinalidad a lo más κ.

Como $cl_X(V)$ es inicialmente κ-compacto, por el Lema 2.9, g tiene un punto de acumulación $x \neq y$. Dado que $x \notin Y$, existe una vecindad cerrada O fuertemente κ-compacta. En consecuencia, g tiene una subred en O que converge a x. Esto es, $cl_X(V)$ es fuertemente κ-compacta, lo que contradice que $y \in Y$. Así, $Y = \emptyset$ implica que X es fuertemente κ-compacto. □

Una pregunta natural es, si el producto de dos espacios fuertemente κ-compactos es fuertemente κ-compacto. La respuesta a esta pregunta es afirmativa. No obstante, nos enfocaremos en mostrar que el producto numerable de espacios fuertemente κ-compactos es fuertemente κ-compacto y, para tal efecto, necesitamos recordar los conceptos de mapeos monótono y expansivo (ver Definición 1.35), así como auxiliarnos del siguiente lema.

2.20 Lema. *Supongamos que $f : \lambda^{<\omega} \longrightarrow X$ es una λ-red en X y ϕ es un mapeo λ-red tal que la λ-subred $f \circ \phi$ converge a $p \in X$. Entonces, existe ψ un mapeo λ-red, monótono y expansivo tal que $f \circ \psi$ converge a p.*

Demostración. La definición de $\psi(F)$ es por recursión. Sea $\psi(\emptyset) = \emptyset$. Ahora supongamos que para alguna $n \in \omega$, se tiene definida $\psi(G)$ para todos los conjuntos G de cardinalidad a lo más $n-1$ y supongamos también que $F \in \lambda^{<\omega}$ tiene cardinalidad n. Entonces, como ϕ es un mapeo λ-red, resulta que

(1) Existe $H_F \in \lambda^{<\omega}$ tal que para toda $H \supseteq H_F$, se tiene que $\phi(H) \supseteq F$.

(2) Para cada $G \subsetneq F$ existe $K_G \in \lambda^{<\omega}$ tal que si $H \supseteq K_G$ entonces $\phi(H) \supseteq \psi(G)$.

Ahora definimos $L_F \in \lambda^{<\omega}$ como

$$L_F = F \cup H_F \cup \bigcup\{K_G : G \subsetneq F\}$$

y

$$\psi(F) = \phi(L_F).$$

Esto define a $\psi(F)$ para toda $F \in \lambda^{<\omega}$ por recursión. Ahora, como $L_F \supseteq H_F$ se tiene de (1) que, $\phi(L_F) \supseteq F$, de donde, $\psi(F) = \phi(L_F) \supseteq F$. Así que, ψ es un mapeo expansivo. Además, cuando $G \subsetneq F$, se sigue de (2) que existe K_G y puesto que $L_F \supseteq K_G$, resulta que $\phi(L_F) \supseteq \psi(G)$. En consecuencia, como $\psi(F) = \phi(L_F)$ se sigue que $\psi(F) \supseteq \psi(G)$, lo que muestra que ψ es monótona.

Finalmente, veamos que $f \circ \psi$ converge a p. Supongamos que V es una vecindad de p. Dado que $f \circ \phi$ converge a p, existe $F_0 \in \lambda^{<\omega}$ tal que $f(\phi(F)) \in V$ para toda $F \in \lambda^{<\omega}$ con $F_0 \subseteq F$. Por tanto, puesto que $\psi(F) = \phi(L_F)$ y dado que $F \supseteq F_0$, se sigue de (1) que, $L_F \supseteq F \supseteq F_0$. Luego, $f(\psi(F)) = f(\phi(L_F) \in V$, lo que muestra que $f \circ \psi$ converge a p.

□

2.21 Teorema. *El producto numerable de espacios fuertemente κ-compactos es fuertemente κ-compacto.*

Demostración. Supongamos que para cada $n \in \omega$, X_n es fuertemente κ-compacto y sea $X = \prod\{X_n : n \in \omega\}$. Sea $f : \lambda^{<\omega} \longrightarrow X$ una λ-red en X para algún $\lambda \leq \kappa$, entonces $\pi_1 \circ f$ es una λ-red en X_1 que tiene una λ-subred, $\pi_1 \circ f \circ \phi_1 : \lambda^{<\omega} \longrightarrow X_1$ que converge a un punto p_1, donde ϕ_1 es un mapeo λ-red. La red $\pi_2 \circ f \circ \phi_1 : \lambda^{<\omega} \longrightarrow X_2$ es una λ-red en X_2 que tiene a su vez una λ-subred $\pi_2 \circ f \circ \phi_1 \circ \phi_2 : \lambda^{<\omega} \longrightarrow X_2$ que converge a un punto p_2. Análogamente, para cada $n \in \omega$ se obtienen λ-subredes

$$\pi_1 \circ f \circ \Phi_1, \ \ \pi_2 \circ f \circ \Phi_2, \ \ \pi_3 \circ f \circ \Phi_3, \ \ \ldots, \ \ \pi_n \circ f \circ \Phi_n$$

donde para cada $n \in \omega$

$$\Phi_n = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n$$

y

$$\pi_n \circ f \circ \Phi_n \text{ converge a } p_n \in X_n.$$

Por el Lema 2.20, podemos suponer que cada mapeo λ-red ϕ_n es monótono y expansivo. Ahora, sea $F \in \lambda^{<\omega}$; si $|F| = n$ para algún $n \in \omega$, definimos $\Phi : \lambda^{<\omega} \longrightarrow \lambda^{<\omega}$ por $\Phi(F) = \Phi_n(F)$.

Afirmamos que Φ es un mapeo λ-red monótono y expansivo tal que $f \circ \Phi$ es una λ-subred convergente de f. En efecto:

• Φ *es un mapeo monótono.* Si $G \subseteq H$ donde $|G| = n$ y $|H| = n + k$, entonces

$$\Phi(G) = \Phi_n(G) = \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n(G) \subseteq \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n(H)$$
$$\subseteq \phi_1 \circ \phi_2 \circ \cdots \circ \phi_n \circ \cdots \circ \phi_{n+k}(H) = \Phi_{n+k}(H) = \Phi(H)$$

ya que la composición de mapeos monótonos es monótona.

• Φ *es expansivo.* Si $G \in \lambda^{<\omega}$, digamos que $|G| = m$, entonces $\Phi(G) = \Phi_m(G) \supseteq G$, debido a que la composición de mapeos expansivos es expansivo; de donde, Φ es expansivo.

• $f \circ \Phi$ *es una λ-subred de f.* Si $G \in \lambda^{<\omega}$ con $|G| = m$ y $H \supseteq G$, entonces $\Phi(H) \supseteq \Phi(G) = \Phi_m(G) \supseteq G$.

• *$f \circ \Phi$ converge a p.* Basta mostrar que para cada $n \in \omega$, $\pi_n \circ f \circ \Phi$ converge a p_n. Supongamos que U es una vecindad abierta de p_n. Como $\pi_n \circ f \circ \Phi_n$ converge a p_n, entonces existe $G \in \lambda^{<\omega}$ tal que cuando $H \supseteq G$ resulta que $\pi_n \circ f \circ \Phi_n(H) \in U$. De manera que, si $H \supseteq G$ y $|H| = m \geq n$, se sigue que

$$\pi_n \circ f \circ \Phi(H) = \pi_n \circ f \circ \phi_m(H) = \pi_n \circ f \circ \Phi_n \circ \phi_{n+1} \circ \cdots \circ \phi_m(H).$$

De hecho, como $G \subseteq H \subseteq \phi_{n+1} \circ \cdots \circ \phi_m(H)$, resulta que

$$\pi_n \circ f \circ \Phi_n(\phi_{n+1} \circ \cdots \circ \phi_m(H)) \in U.$$

Por tanto, para cada $n \in \omega$, se tiene que $\pi_n \circ f \circ \Phi$ converge a p_n, de donde, $f \circ \Phi$ converge a p.

□

2.22 Teorema. *Si X es un espacio inicialmente κ-compacto y Y es fuertemente κ-compacto, entonces $X \times Y$ es inicialmente κ-compacto.*

Demostración. Supongamos que $f : D \longrightarrow X \times Y$ definida por $f(d) = (x_d, y_d)$ es una red de cardinalidad $\lambda \leq \kappa$ en $X \times Y$. Como Y es fuertemente κ-compacto, existe una subred $\pi_Y \circ f \circ \phi : E \longrightarrow Y$ de $\pi_Y \circ f$ con $|E| \leq \lambda$ que converge a un punto $y \in Y$. Como X es inicialmente κ-compacto, la correspondiente subred $\pi_X \circ f \circ \phi : E \longrightarrow X$ tiene un punto de acumulación $x \in X$. Puesto que una de las coordenadas converge, se puede concluir que el punto (x, y) es un punto de acumulación de la red f. Por lo tanto, $X \times Y$ es inicialmente κ-compacto. □

2.23 Definición. *Un espacio X es **localmente fuertemente κ-compacto** si cada punto tiene una vecindad cerrada que es fuertemente κ-compacta.*

En un espacio T_3 que es localmente fuertemente κ-compacto, cada punto tiene una base local de vecindades cerradas que son fuertemente κ-compactas. Además, en un espacio κ-red, un subespacio inicialmente κ-compacto, es necesariamente cerrado.

El producto de un abanico de Fréchet y una sucesión convergente no es de Fréchet y, por tanto, el producto de dos espacios ω-Fréchet donde uno de ellos es compacto y secuencialmente compacto no necesariamente es ω-Fréchet. El producto de cualesquiera dos espacios de Fréchet incluso puede tener estrechez no numerable (ver [4]). Sin embargo, se tiene el siguiente resultado:

2.24 Teorema. *El producto de un espacio κ-red X con un espacio κ-red, T_3 y localmente fuertemente κ-compacto Y, es un espacio κ-red.*

Demostración. Consideremos a X y Y como en el enunciado del Teorema. Sea $A \subseteq X \times Y$ tal que $cl_{X\times Y}(A) \setminus A \neq \emptyset$, digamos $(x, y) \in cl_{X\times Y}(A) \setminus A$. Construiremos una red de cardinalidad κ en A que converja fuera de A. Tomemos K una vecindad cerrada fuertemente κ-compacta de y. Sin pérdida de generalidad, consideremos el espacio $X \times K$. Si $(x, y) \in cl_{X\times Y}(A \cap (\{x\} \times K))$ entonces dado que K es cerrado en Y, se tiene que K es un espacio κ-red. Por Lema 3.7 de [22], existe una κ-red en $A \cap (\{x\} \times K)$ que converge a un punto $(x, p) \notin A$. Así que, podemos suponer que $(x, y) \notin cl_{X\times Y}(A \cap (\{x\} \times K))$ y, por tanto, existe una vecindad cerrada U fuertemente κ-compacta de y tal que $U \cap (A \cap (\{x\} \times K)) = \emptyset$. Lo que nos reduce al caso en que Y es fuertemente κ-compacto, $(x, y) \in cl_{X\times Y}(A) \setminus A$ y $A \cap (\{x\} \times Y) = \emptyset$.

Puesto que X es un espacio κ-red y $\pi_X(A)$ no es cerrado en X, existe una κ-red $\xi : \kappa^{<\omega} \longrightarrow \pi_X(A)$ que converge a un punto $\widehat{x} \notin \pi_X(A)$. Para cualquier $F \in \kappa^{<\omega}$, sea $\xi(F) = x_F$ y elegimos $y_F \in Y$ tal que $(x_F, y_F) \in A$. Entonces $\rho : \kappa^{<\omega} \longrightarrow \pi_Y(A)$ definida por $\rho(F) = y_F$ es una κ-red en Y. Como Y es fuertemente κ-compacto, ρ tiene una subred de cardinalidad a lo más κ, digamos $\rho \circ H : D \longrightarrow \pi_Y(A)$ donde $H : D \longrightarrow \kappa^{<\omega}$ es tal que $|D| \leq \kappa$ y que converge a un punto $p \in Y$. La red $h : D \longrightarrow X \times Y$ definida por $h(d) = ((\xi \circ H)(d), (\rho \circ H)(d))$ es una red de cardinalidad a lo más κ que converge a $(\widehat{x}, p) \notin A$.

$\square$

Como corolarios se obtienen dos resultados de Boehme [12].

2.25 Corolario. *El producto de dos espacios secuenciales, donde uno de ellos es localmente secuencialmente compacto, es secuencial.*

2.26 Corolario. *El producto de dos espacios secuenciales, donde uno de ellos es localmente numerablemente compacto y T_3, es secuencial.*

Demostración. Un espacio secuencial y numerablemente compacto es secuencialmente compacto. □

2.2. La Propiedad de Whyburn en Espacios Numerables

Un espacio numerable tiene carácter a lo más $\mathfrak{c}$. No obstante, muchos de tales espacios no son de Whyburn aún cuando son secuenciales (ver el Lema 2.28 de abajo). El siguiente Teorema generaliza la Proposición 2 de [31], que afirma que un espacio numerable de carácter menor que $\mathfrak{d}$ es de Whyburn.

2.27 Teorema. *Si X es un espacio de Hausdorff, numerable y es κ-Fréchet para alguna $\kappa < \mathfrak{d}$, entonces X es de Whyburn.*

Demostración. Sea $A \subset X$ y $q \in cl_X(A) \setminus A$ arbitrario. Si existe una vecindad V de q tal que para cualquier vecindad U de q, $A \cap (V \setminus U)$ es finito, entonces $S = A \cap V$ forma una sucesión que converge a q. Por tanto, $cl_X(C) \setminus A = \{q\}$.

Por otro lado, fijemos una sucesión decreciente de vecindades abiertas V_n de q tal que $\bigcap_{n\in\omega} cl_X(V_n) = \{q\}$. Supongamos que para cada $n \in \omega$, $C_n = (V_n \setminus V_{n+1}) \cap A$ es infinito. Identificamos cada C_n con $\{n\} \times \omega$. Como X es κ-Fréchet, existe una κ-red $\langle x_F \rangle$ en A tal que $x_F \to q$. Para cada $F \in \kappa^{<\omega}$ sea $A_F = \{x_G : G \in \kappa^{<\omega} \text{ y } F \subseteq G\}$. Nótese que cualquier A_F intersecta a una infinidad de C_n's, pues de lo contrario, q no estaría en la cerradura de los V_n's.

Las funciones parciales $f_{A_F} : dom(f_{A_F}) \to \omega$ con $dom(f_{A_F}) \subset \omega$, pueden ser elegidas de manera que $\langle n, f_{A_F}(n)\rangle \in C_n \cap A_F$ para toda $n \in dom(f_{A_F})$. Como $|\{A_F : F \in \kappa^{<\omega}\}| < \mathfrak{d}$, por el Teorema 3.10 de [16], existe una función $g : \omega \to \omega$ tal que para cada A_F existe $n \in dom(f_{A_F})$ tal que $g(n) > f_{A_F}(n)$. Ahora, $C = \{\langle n, k\rangle : k \leq g(n)\}$ es un subconjunto de A. Luego, como cada abierto básico V_α de q intersecta a una infinidad de C_n's y $\langle n, f_{A_F}(n)\rangle \in A_F$ entonces $\langle n, f_{A_F}(n)\rangle \in V_\alpha$, de donde, $V_\alpha \cap C \neq \emptyset$ para cada $\alpha < \kappa$. Así que, $q \in cl_X(C)$. Además, para cualquier $n \in \omega$ se tiene que $C \setminus V_n$ es finito. Por lo tanto, $cl_X(C) \setminus A = \{q\}$. □

Recordemos que el espacio de *Arens-Franklin* $X = (\omega \times (\omega + 1)) \cup \{\infty\}$ cuya topología se describe como sigue:

1. ω y $\omega + 1$ tienen la topología del orden, de modo que, $\omega \times (\omega + 1)$ tiene la topología producto.
2. La topología en ∞ es la más fina para que $\{(n, \omega) : n \in \omega\}$ converja a ∞.

Obsérvese que este espacio es numerable y secuencial, pero no es de Fréchet y, por tanto, tampoco es de Whyburn. Para el siguiente resultado necesitamos recordar la Definición 1.46.

2.28 Lema. *No existe una red de cardinalidad κ, para ningún $\kappa < \mathfrak{d}$ en $\omega \times \omega$ en el espacio de Arens-Franklin X que converja a ∞; esto es, $\sigma_F(X) \geq \mathfrak{d}$.*

Demostración. Supongamos que $(x_F)_{F \in \kappa^{<\omega}}$ es una κ-red con $\kappa < \mathfrak{d}$ en $A = \omega \times \omega$. Mostraremos que $(x_F)_{F \in \kappa^{<\omega}}$ no converge a ∞. Veamos los posibles casos:

Caso 1. Existe un conjunto no vacío $E \subset \omega$ con $|E| < \omega$ y $F \in \kappa^{<\omega}$ tal que $A_F = \{x_G : F \subseteq G\} \subseteq E \times \omega$. Entonces $U = A \setminus (E \times \omega)$ es una vecindad de ∞ tal que $A_F \cap U = \emptyset$.

Caso 2. Dado cualquier $E \subset \omega$ con $|E| < \omega$, existe $G \in \kappa^{<\omega}$ tal que $x_G \notin \bigcup_{n \in E} L_n$. Sean $F \in \kappa^{<\omega}$ y $n_0 \in \omega$ tal que $x_F \in L_{n_0}$. Obsérvese que $\{n : A_F \cap L_n \neq \emptyset\}$ es infinito. Entonces existen $n_1 > n_0$ y $F_1 \supseteq F_0 = F$ tal que $x_{F_1} \notin \bigcup_{n \leq n_0} L_n$ y $x_{F_1} \in L_{n_1}$. Por la misma razón, existen $n_2 > n_1$ y $F_1 \subseteq F_2$ tal que $x_{F_2} \notin \bigcup_{n \leq n_1} L_n$ y $x_{F_2} \in L_{n_2}$. Este proceso puede repetirse un número finito de veces, puesto que sólo se consideran conjuntos finitos en κ. En conclusión, para cada $F \in \kappa^{<\omega}$ existe una cadena $B_F = \{x_{F_n} : n \in \omega\} \subseteq A_F$.

Nótese que B_F intersecta a una infinidad de L_n's. Por lo tanto, las funciones parciales (porque siempre se pueden extender a ω), $f_{B_F} : dom(f_{B_F}) \to \omega$ con dominio infinito $dom(f_{B_F}) \subset \omega$, pueden ser elegidas de manera que $\langle n, f_{B_F}(n) \rangle \in L_n \cap B_F$ para toda $n \in dom(f_{B_F})$.

Por el Teorema 2.27, como $\kappa < \mathfrak{d}$, existe una función $g : \omega \to \omega$ tal que para toda $F \in \kappa^{<\omega}$ existe $m \in dom(f_{B_F})$ tal que $g(n) > f_{B_F}(n)$ para toda $n \geq m$. Sea $V_g = \{\langle n, k\rangle : n \geq m \,\mathrm{y}\, k \geq g(n)\}$. Nótese que, V_g es un abierto básico de ∞ tal que $A_F \subsetneq V_g$ para toda $F \in \kappa^{<\omega}$.

□

Combinando los últimos dos resultados tenemos:

2.29 Corolario. *El mínimo carácter de red de Fréchet de un espacio numerable que no es de Whyburn es* $\mathfrak{d}$*; esto es,* $\mathfrak{d} = \text{mín}\{\lambda :$ *existe un espacio* X *de Hausdorff numerable con* $\sigma(X) = \lambda$ *y que no es de Whyburn*$\}$.

Demostración. Del Lema previo se sigue que $\chi(\infty, X) = \mathfrak{d}$, de donde, $\sigma_F(X) = \mathfrak{d}$. □

Capítulo 3

Espacios de Whyburn

En el presente capítulo mostraremos algunas generalizaciones y ejemplos de resultados conocidos relacionados con sucesiones convergentes, funciones cardinales y espacios P.

3.1. Algunas Generalizaciones

En el Lema 2.16 de [36], Tkachuk y Yashchenko mostraron que, *si X es un espacio de Hausdorff, infinito, débilmente Whyburn y compacto, entonces X tiene una sucesión convergente no trivial.* No obstante, este resultado se puede generalizar fácilmente a numerablemente compactos, como sigue:

3.1 Proposición. *Si X es un espacio de Hausdorff, infinito, débilmente Whyburn y numerablemente compacto, entonces tiene una sucesión convergente no trivial.*

Demostración. Por el Lema 1.12, podemos encontrar un subconjunto $A = \{x_n : n \in \omega\}$ infinito y discreto de X. Como X es numerablemente compacto se tiene que A no es cerrado, y puesto que X es débilmente Whyburn, existe $B \subset A$ tal que $|\, cl_X(B) \setminus A \,| = 1$. Entonces, $cl_X(B) = B \cup \{p\}$ para algún $p \in cl_X(A) \setminus A$ es numerablemente compacto, por ser cerrado en X. Dado que B es discreto, $B \cup \{p\}$ es una sucesión convergente. Esto es, B converge a p. $\square$

De hecho, este resultado también se puede generalizar a espacios débilmente compactos con un conjunto infinito de puntos aislados (ver Definición 1.17).

3.2 Proposición. *Si X es un espacio de Hausdorff, infinito, débilmente Whyburn y débilmente compacto con un subconjunto infinito D de puntos aislados, entonces X tiene una sucesión convergente no trivial.*

Demostración. Sea $D \subset X$ un subconjunto numerablemente infinito de puntos aislados. Puesto que X es débilmente compacto, D no es cerrado. Como X es débilmente Whyburn, existe $B \subset D$ tal que $cl_X(B) \setminus D = \{p\}$ para algún $p \in cl_X(D) \setminus D$. Luego, como $cl_X(B)$ es regular cerrado, es débilmente compacto con un sólo punto no aislado. Por tanto, $B \cup \{p\}$ es una sucesión convergente. $\square$

Después de esto, lo natural es preguntarse cuándo el resultado es cierto para los espacios débilmente compactos o para los espacios pseudocompactos. Para contestar a la primera pregunta necesitamos de los siguientes dos lemas, pero antes recordemos la descomposición de Cantor-Bendixson descrita en el Capítulo 1.

3.3 Lema. *Sea X un espacio T_1 infinito. Para $n \in \omega$, X tiene orden de dispersión a lo más n si y sólo si es la unión de n subespacios discretos.*

Demostración. La necesidad es inmediata. Para la suficiencia, procederemos por inducción. Si el orden de dispersión es 1, el resultado es inmediato.

Supongamos que el resultado es válido para n. Sea X un espacio con orden de dispersión $n+1$. Sin pérdida de generalidad, podemos asumir que $X_n = \{x_n\}$.

Supongamos que $X = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$ donde los D_k's son subespacios discretos y cada $x_n \in D_n$. Entonces, existe una vecindad abierta V_n de x_n tal que $V_n \cap D_n = \{x_n\}$. Por tanto, $V_n \cap (X \setminus X_n) \cap D_n = \emptyset$ y se tiene también que, $V_n \cap X_k \neq \emptyset$ para cada $k < n$.

Escogemos $x_{n-1} \in V_n \cap X_{n-1}$ y, sin perder generalidad, suponemos que $x_{n-1} \in D_{n-1}$. Luego, elegimos una vecindad abierta V_{n-1} de x_{n-1} tal que $V_{n-1} \cap D_{n-1} = \{x_{n-1}\}$ y $V_{n-1} \subseteq V_n$.

Al continuar este proceso, obtenemos los puntos $\{x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1\}$ y los conjuntos abiertos $\{V_n, V_{n-1}, \ldots, V_1\}$ con las siguientes propiedades:

1. $x_k \in V_k \cap X_k$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$.
2. $V_k \subseteq V_{k+1}$ para cada $k \in \{1, \dots, n-1\}$.
3. $\{x_k\} = V_k \cap D_k \subseteq X_k$ para cada $k \in \{1, \dots, n\}$.

Entonces, $W = \bigcap_{k=1}^{n} V_k$ es un conjunto abierto no vacío tal que

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n} V_k\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k\right) = W \cap X = \emptyset.$$

No obstante, como $W \cap X_0 \neq \emptyset$, se tiene una contradicción. Por tanto, X es la unión de $n+1$ subespacios discretos. $\square$

Para lo que sigue, nótese que para cada $n \in \omega$, el orden de dispersión del ordinal numerable $\omega^n + 1$ es $n+1$.

3.4 Lema. *Si X es un espacio métrico disperso con orden de dispersión $n+1$, donde $n \geq 1$ y $x \in X_n$, entonces para cada $\varepsilon > 0$, existe una inmersión $h : \omega^n + 1 \longrightarrow X$ tal que $h(\omega^n) = x$ y $diam(h[\omega^n + 1]) \leq \varepsilon$.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y X un espacio métrico disperso con orden de dispersión n. La prueba es por inducción en el orden de dispersión de X.

Para $n = 1$. Si X es un espacio métrico disperso con orden de dispersión 2, entonces cada punto $x \in X_1 = X \setminus X_0$ es límite de una sucesión S en X_0; S puede tomarse de diámetro menor que ε y $S \cup \{x\}$ es homeomorfo a $\omega + 1$.

Supongamos que la afirmación es válida para $n \leq k$. Sea X un espacio métrico disperso con orden de dispersión $k+1$. Supongamos que $\varepsilon > 0$ y que $x \in X_k$ es el límite de una sucesión inyectiva de puntos $\langle x_m \rangle = S$ en X_{k-1} tal que $diam(S) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como X es hereditariamente colectivamente normal, podemos encontrar conjuntos abiertos mutuamente disjuntos U_m tales que $x_m \in U_m$; cada conjunto U_m es disperso y tiene orden de dispersión k. Aplicando la hipótesis inductiva, para cada $m \in \omega$, podemos encontrar una inmersión $h_m : \omega^{k-1} + 1 \longrightarrow U_m$ tal que $h_m(\omega^{k-1}) = x_m$ y $diam(T_m) < \frac{\varepsilon}{2^{m+1}}$, donde $T_m = h_m[\omega^{k-1} + 1]$.

Sean $T = \bigcup\{T_m : m \in \omega\} \cup \{x\}$ y $h : \omega^k + 1 \longrightarrow T$ tales que $h(\omega^k) = x$, $h[(\omega^{k-1} \cdot m) + 1] = T_m$ y, que satisface que,

$$diam(T) = diam(S) + diam\left(\bigcup_{m\in\omega} T_m\right) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{m\in\omega} \frac{\varepsilon}{2^{m+1}} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Como S converge a x, para cualquier abierto U de x, existe un $m_0 \in \omega$ tal que $x_m \in U$ para cada $m \geq m_0$ y, como $diam(T) < \varepsilon$, resulta que U contiene a todas salvo un número finito de copias de $\omega^{k-1}+1$. Luego, $h(U)$ representa un abierto de x en T. Por tanto, h es abierta. Además, por definición, h es continua y biyectiva. Lo que significa que, X contiene una copia de ω^k+1. $\square$

Finalmente, podemos contestar negativamente a la pregunta anterior, ya que se tiene un espacio débilmente compacto que no tiene sucesiones convergentes no triviales. Ver Definición 1.16 para espacio H-cerrado.

3.5 Ejemplo. *Existe un espacio de Hausdorff, Whyburn y H-cerrado (por tanto, débilmente compacto) que no tiene sucesiones convergentes no triviales.*

Demostración. Consideremos el espacio $X = [0, 1]$ con la topología métrica usual μ. Sea τ la topología en X generada por

$$\mu \cup \{X \setminus D : D \subseteq X \ \text{ es } \mu\text{-discreto}\}.$$

Como $\{X \setminus D : D \subseteq X \ \text{ es } \mu\text{-discreta}\}$ es un filtro de subconjuntos densos de (X, μ), por 4.8.h.8 y 7.M.3 de [33], se sigue que (X, τ) es H-cerrado. Además, (X, τ) es de Hausdorff y no tiene sucesiones convergentes no triviales. Más aún, se sigue del Lema 3.3 que, para cualquier subespacio disperso $E \subset (X, \mu)$ con orden de dispersión n, se puede expresar E como $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ donde los E_i son μ-discretos. Luego, como $X \setminus E = \bigcap_{i=1}^{n}(X \setminus E_i)$ es τ-abierto, resulta que E es τ-cerrado.

Mostraremos que (X, τ) es un espacio de Whyburn. Supongamos que $A \subseteq X$ no es τ-cerrado y que $x \in cl_\tau(A) \setminus A$. Ahora en (X, μ), el conjunto A es la unión de un subconjunto disperso $C \subseteq A$ y un subconjunto denso en sí mismo $B \subseteq A$, por tanto, se tiene que $x \in cl_\tau(B)$ o $x \in cl_\tau(C)$. Consideremos los casos:

Caso 1. $x \in cl_\tau(B)$. Como B es μ-denso en sí mismo, entonces cualquier subconjunto μ-abierto no vacío de B contiene a un subconjunto denso homeomorfo al espacio de los números racionales, $\mathbb{Q}$, por ([17], 6.2.A). Elegimos $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$ una base local anidada de x de conjuntos μ-cerrados. Por regularidad de (X, μ) supongamos que, $V_{n+1} \subseteq int_\mu(V_n)$ y que $B \cap [int_\mu(V_n) \setminus V_{n+1}] \neq \emptyset$ para cada $n \in \omega$. Como $\mathbb{Q}$ es universal para espacios métricos numerables, para cada $n \in \omega$, en el subconjunto abierto $B \cap [int_\mu(V_n) \setminus V_{n+1}]$ de B podemos encontrar un subespacio D_n homeomorfo al ordinal compacto $\omega^n + 1$ que tiene orden de dispersión $n+1$. Sea $D = \bigcup\{D_n : n \in \omega\}$. Luego, D es disperso y tiene orden de dispersión ω; además, por definición, $x \in cl_\mu(D) \setminus D$ implica que $x \in cl_\tau(D) \setminus D$ y, por construcción, $cl_\tau(D) \setminus D = \{x\}$. De manera que, $cl_\tau(D) \setminus A = \{x\}$. Por tanto, (X, τ) es débilmente Whyburn.

Caso 2. $x \in cl_\tau(C)$. Elegimos $\mathcal{V} = \{V_n : n \in \omega\}$ una base local anidada de x de conjuntos μ-cerrados. Como cada subespacio disperso de (X, μ) de orden de dispersión finito es τ-cerrado, se sigue que para cada $n \in \omega$, $C \cap V_n$ tiene orden de dispersión infinito (numerable) κ y como cualquier ordinal límite numerable tiene cofinalidad ω, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\kappa = \omega$. Entonces, usando el Lema 3.4, para cada $n \in \omega$ podemos encontrar inmersiones $h_n : \omega^n + 1 \longrightarrow V_n \cap C$. Si $m \neq n$, podemos escoger $T_n \cap T_m = \emptyset$ donde $T_k = h_k[\omega^k + 1]$. Cada uno de estos conjuntos T_k es μ-compacto y τ-discreto pero $T = \bigcup\{T_k : k \in \omega\}$ tiene orden de dispersión infinito y, por el Lema 3.3, T no es unión de un número finito de subespacios μ-discretos. De la definición de τ y del hecho de que $x \in cl_\mu(T)$, se sigue que $x \in cl_\tau(T)$. Además, puesto que V_n es μ-cerrado para cada n, se sigue que, $cl_\mu(T) \setminus C = \{x\}$ y, por lo tanto, $cl_\tau(T) \setminus C = \{x\}$.

$\square$

Por supuesto, el espacio construido arriba no es regular, lo que nos lleva a preguntarnos si, ¿Cualquier espacio de Tychonoff, pseudocompacto y débilmente Whyburn tiene una sucesión convergente?

3.6 Teorema. *Un espacio k de Hausdorff es débilmente Whyburn si y sólo si para cada conjunto no cerrado $A \subseteq X$, existe algún conjunto compacto $K \subseteq X$ y $x \notin A$ tal que $cl_X(K \cap A) = (K \cap A) \cup \{x\} = K$.*

Demostración. La suficiencia es inmediata, ya que $K \cap A$ no es cerrado en K. Para la necesidad, supongamos que (X, τ) es un espacio k de Hausdorff débilmente Whyburn y que $A \subseteq X$ no es cerrado en X. Entonces existe un conjunto compacto $K \subseteq X$ tal que $K \cap A$ no es cerrado en K. Como K es un subconjunto cerrado de X, se sigue que K es débilmente Whyburn. De manera que, existen $x \in K \setminus A$ y un conjunto $B \subseteq K \cap A$ tal que $cl_X(B) \setminus (K \cap A) = \{x\} = cl_X(B) \setminus A$. Luego, $cl_X(B)$ es el subconjunto compacto requerido de X. □

3.7 Corolario. *Cualquier espacio k de Hausdorff débilmente Whyburn es pseudoradial.*

Demostración. Es consecuencia inmediata del Teorema 3.6 y de la Proposición 1.15. □

Ahora veamos un resultado relativo a productos.

3.8 Teorema. *El producto de dos espacios de Hausdorff, Whyburn donde uno de ellos es espacio k y el otro es localmente compacto es débilmente Whyburn.*

Demostración. Supongamos que X es un espacio k de Whyburn y que Y es un espacio de Whyburn localmente compacto. Por el Corolario 1.24 y por el Teorema 1.23, X y Y son de Fréchet, respectivamente. Por 3.3.J de [17], se tiene que $X \times Y$ es secuencial y, por tanto, débilmente Whyburn. □

3.2. Un Par de Desigualdades Cardinales en Espacios de Whyburn

En esta sección, probaremos algunas desigualdades cardinales válidas en la clase de los espacios de Whyburn y hereditariamente débilmente Whyburn.

El siguiente resultado se basa en que, *si X es un espacio de Hausdorff y primero numerable, entonces $\mid X \mid \leq d(X)^\omega$* (Teorema 4.4, [23]), por lo que para espacios de Whyburn se obtuvieron los siguientes resultados:

3.9 Teorema. *Si X es débilmente Whyburn, entonces $|X| \leq d(X)^{t(X)}$.*

Demostración. Si X es finito, el resultado es trivial; así que asumiremos que X es infinito. Supongamos que $d(X) = \delta$ y que $D \subseteq X$ es un subconjunto denso (propio) de cardinalidad δ. Sea $D = D_0$ y definimos recursivamente una cadena ascendente de subespacios $\{D_\alpha : \alpha \leq \kappa^+\}$ como sigue:

Como X es débilmente Whyburn, existen $x \in X \setminus D$ y $B_x \subseteq D$ tal que $cl_X(B_x) \setminus D = \{x\}$; si denotamos por κ a la estrechez de X, entonces podemos suponer que $|B_x| \leq \kappa$. Así que $|cl_X(B_x)| \leq \delta \leq \delta^\kappa$.

Definimos,

$$D_1 = \bigcup \{cl_X(B) : B \subseteq D_0,\ |B| \leq \kappa,\ |cl_X(B) \setminus D_0| = 1\}.$$

Luego, $D_0 \subsetneq D_1$ y como hay a lo más δ^κ de tales conjuntos B, se sigue que $|D_1| \leq \delta^\kappa$.

Supongamos ahora que para cada $\beta < \alpha \leq \kappa^+$ hemos definido conjuntos densos D_β tales que $|D_\beta| \leq \delta^\kappa$ y $D_\gamma \subseteq D_\lambda$ para $\gamma < \lambda < \alpha$.

- Si α es un ordinal límite, entonces definimos $D_\alpha = \bigcup\{D_\beta : \beta < \alpha\}$ y entonces $|D_\alpha| \leq |\alpha| \cdot \delta^\kappa \leq \kappa^+ \cdot \delta^\kappa = \delta^\kappa$.

- Si $\alpha = \beta + 1$ y $D_\beta \subsetneq X$, entonces como X es débilmente Whyburn, existen $x \in X \setminus D_\beta$ y $B_x \subseteq D_\beta$ tales que $cl_X(B_x) \setminus D_\beta = \{x\}$. Como $t(X) = \kappa$, podemos suponer nuevamente que $|B_x| \leq \kappa$, lo que implica que $cl_X(B_x) \subseteq D_\beta \cup \{x\}$ y, en consecuencia, $|cl_X(B_x)| \leq \delta^\kappa$. Ahora podemos definir

  $$D_\alpha = \bigcup\{cl_X(B) : B \subseteq D_\beta,\ |B| \leq \kappa \text{ y } |cl_X(B) \setminus D_\beta| = 1\}.$$

  Luego, $D_\beta \subsetneq D_\alpha$ y como hay a lo más $(\delta^\kappa)^\kappa = \delta^\kappa$ de tales conjuntos B, se sigue que $|D_\alpha| \leq \delta^\kappa$.

Para completar la prueba, basta mostrar que para algún $\alpha \leq \kappa^+$, se tiene que $D_\alpha = X$. Supongamos lo contrario, es decir, $\Delta = D_{\kappa^+} = \bigcup\{D_\alpha : \alpha < \kappa^+\} \neq X$; luego, $|\Delta| \leq \kappa^+ \cdot \delta^\kappa = \delta^\kappa$. Como X es débilmente Whyburn y $t(X) = \kappa$, existen $z \in X \setminus \Delta$ y $B \subset \Delta$ de cardinalidad a lo más κ tales que $cl_X(B) \setminus \Delta = \{z\}$. De manera que $|cl_X(B)| \leq \delta^\kappa$. Luego, como los conjuntos $\{D_\alpha : \alpha < \kappa^+\}$ forman una cadena ascendente y $cf(\kappa^+) = \kappa^+ > \kappa$, resulta que para algún $\gamma < \kappa^+$, $B \subseteq \bigcup\{D_\alpha : \alpha < \gamma\}$. Por tanto, $z \in D_{\gamma+1}$, lo que es una contradicción. $\square$

3.10 Lema. *Si X es un espacio hereditariamente débilmente Whyburn, entonces $|X| \leq 2^{d(X)}$.*

Demostración. Supongamos que $|X| > 2^{d(X)}$. Sean Δ un subconjunto denso de X de cardinalidad mínima, $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Delta : | cl_X(A) | \leq 2^{d(X)}\}$ y $Y = \bigcup\{cl_X(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Como $| \mathcal{P}(\Delta) | = 2^{d(X)}$, se sigue que $| Y | \leq 2^{d(X)}$ y, por tanto, si ponemos $Z = \Delta \cup (X \setminus Y)$ se tiene que $| Z | > 2^{d(X)}$. Ahora, si $B \in \mathcal{P}(\Delta) \setminus \mathcal{A}$ entonces $| cl_X(B) \cap Z | > 2^{d(X)} \neq 1$, lo que muestra que Δ es Whyburn cerrado en Z pero no cerrado. Así que Z no es débilmente Whyburn y, en consecuencia, X no es hereditariamente débilmente Whyburn. $\square$

3.3. Espacios de Whyburn en la clase de los espacios P

En la presente sección, veremos algunos resultados relativos a espacios de Whyburn en la clase de los espacios P.

El siguiente resultado extiende el Teorema 3 de [10] a la clase de los espacios de Hausdorff. Antes, recordemos que:

3.11 Definición. *X es un **espacio** P si cualquier subconjunto G_δ de X es abierto, o equivalentemente, cada F_σ es cerrado. En consecuencia, en un espacio P, T_1, cada conjunto numerable es cerrado y discreto.*

El primer resultado de esta sección es una generalización del Teorema 2 de [10].

3.12 Teorema. *Si X es un espacio P de Hausdorff, débilmente Whyburn y de Lindelöf tal que para cada $x \in X$, $\psi(x, X) < \aleph_\omega$, entonces X es pseudoradial.*

Demostración. Para cualquier espacio de Hausdorff se cumple que $\psi_c(x, X) \leq L(X)\psi(x, X)$ (ver 2.8(c) de [24]) y, por tanto, $\psi_c(x, X) < \aleph_\omega$ para cada $x \in X$. Sea $A \subseteq X$ un conjunto no cerrado. Como X es débilmente Whyburn, existe $B \subseteq A$ tal que $cl_X(B) \setminus A = \{x\}$ para algún $x \in cl_X(A) \setminus A$. Sea $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha < \kappa\}$ una familia de subconjuntos abiertos en $cl_X(B) = D$

de cardinalidad mínima que satisfaga que $\bigcap\{cl_D(U_\alpha) : \alpha < \kappa\} = \{x\}$. Como X es un espacio P y x es un punto de acumulación, κ debe ser un cardinal regular no numerable. Por la minimalidad de $\mathcal{U}$, si $\nu < \kappa$ se tiene en D que $[\bigcap\{cl_D(U_\nu) : \nu < \xi\}] \setminus \{x\} \neq \emptyset$ para cada $\xi \in \kappa$. Para cualquier ξ escogemos un punto $x_\xi \in \bigcap\{cl_D(U_\nu) : \nu < \xi\} \setminus \{x\} \subseteq A$, de manera que, $C = \{x_\xi : \xi \in \kappa\}$ forma una cadena en $D \setminus \{x\} = B$.

Como D es de Lindelöf, C tiene un punto de acumulación completa. Afirmamos que x es el único punto de acumulación completa de C. Supongamos que existe un punto de acumulación completa $z \in D$ distinto de x. Entonces, existe $\xi_0 < \kappa$ tal que $cl_D(U_{\xi_0})$ es una vecindad cerrada de x que no contiene a z, de manera que, $V_0 = D \setminus cl_D(U_{\xi_0})$ s una vecindad abierta de z que sólo contiene un segmento inicial de C. Por lo tanto, z no es punto de acumulación completa de C, lo que es una contradicción.

Para ver que C converge a x, tomemos cualquier abierto V de x. Si C no está finalmente en V, entonces C está frecuentemente en $D \setminus V$. Por ser X de Lindelöf, $C \cap (D \setminus V)$ tiene un punto de acumulación completa y, como x es el único punto de acumulación completa de C, se concluye que C converge a x. $\square$

Definimos
$$\alpha^{\underset{\smile}{\kappa}} = \sum\{\alpha^\lambda : \lambda < \kappa\}.$$
Luego, $\omega < \omega_1 \leq \mathfrak{c} = \mathfrak{c}^{\underset{\smile}{\omega_1}}$.

El siguiente resultado contesta negativamente al Problema 3.6 de [32], que pregunta si cualquier espacio P regular de cardinalidad $\leq \omega_1$ es (débilmente) Whyburn. Es importante mencionar que el siguiente espacio tiene cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$. No obstante, tanto Murtinová como Costantini, encontraron de forma independiente un ejemplo de un espacio P regular de cardinalidad $\mathfrak{c}$ que no es débilmente Whyburn (ver Ejemplo 2 de [10]). Lo que mejora considerablemente nuestro ejemplo.

3.13 Teorema. *Existe un espacio P de Tychonoff de cardinalidad $2^{\mathfrak{c}}$ que no es débilmente Whyburn.*

Demostración. Sean $D = \{0,1\}$ y $X = D^{2^{\mathfrak{c}}}$. Dotamos a D de la topología discreta y a X de la topología σ generada por la subbase

$$\bigcap \left\{ p_{\alpha_n}^{-1}[U_n] : \alpha_n \in 2^{\mathfrak{c}},\ U_n \subseteq \{0,1\} \text{ y } n \in \omega \right\}.$$

El espacio X con esta topología es denotado por $(D^{2^{\mathfrak{c}}})_{\omega_1}$ en [15] y puede ser pensado como la ω-modificación del espacio producto compacto de $D^{2^{\mathfrak{c}}}$. Como $\mathfrak{c} = \mathfrak{c}^{\underset{\smile}{\omega_1}}$, se sigue de [1] que $d(X) = \mathfrak{c}$. Luego, (X, σ) es un espacio P y, se sabe que es un espacio de Hausdorff cero dimensional, por tanto, de Tychonoff.

Sea Δ un subconjunto denso de (X, σ) de cardinalidad $\mathfrak{c}$ y definimos la nueva topología τ en X como sigue:

1. Cada punto $x \in \Delta$ es aislado.

2. U es una vecindad τ-abierta de $z \in X \setminus \Delta$ si y sólo si U es una σ-vecindad de z.

Luego, (X, τ) es un espacio P en que Δ es denso. Además, (X, τ) es un espacio de Tychonoff; esto se sigue de 5.1.22 de [17], o bien, nótese que si $\mathcal{B}$ es una base de conjuntos abiertos y cerrados para (X, σ), entonces $\mathcal{B} \cup \{\{x\} : x \in \Delta\}$ es una base de conjuntos abiertos y cerrados para (X, τ).

Ahora definimos un subespacio de (X, τ) con las propiedades requeridas. Sea $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Delta : |\, cl_X(A) \,| \leq 2^{\mathfrak{c}}\}$ y $Y = \bigcup\{cl_X(A) : A \in \mathcal{A}\}$. Como $|\, \mathcal{P}(\Delta) \,| = 2^{\mathfrak{c}}$, se sigue que $|\, Y \,| \leq 2^{\mathfrak{c}}$ y, por lo tanto, $|\, \Delta \cup (X \setminus Y) \,| = 2^{2^{\mathfrak{c}}}$. Ahora, si $B \in \mathcal{P}(\Delta) \setminus \mathcal{A}$ entonces $|\, cl_X(B) \,| > 2^{\mathfrak{c}}$ y enumeramos $\mathcal{P}(\Delta) \setminus \mathcal{A} = \{B_\alpha : \alpha < \kappa\}$ donde $\kappa \leq 2^{\mathfrak{c}}$.

Ahora para cada $\alpha < \kappa$, elegimos dos puntos distintos $x_{1\alpha}, x_{2\alpha} \in X \setminus Y$ de tal manera que $x_{1\alpha}$, $x_{2\alpha} \in cl_X(B_\alpha)$. Sea $Z = \Delta \cup \{x_{i\alpha} : i = 1, 2 \text{ y } \alpha < \kappa\} \subseteq X$. Luego, $|\, Z \,| \leq 2^{\mathfrak{c}}$. Si $B \subseteq \Delta$ y $B \in \mathcal{A}$, entonces B es cerrado en Z o bien $B \notin \mathcal{A}$ lo que implica que $|\, cl_Z(B) \setminus \Delta \,| \geqslant 2$. Por tanto, Z no es débilmente Whyburn. $\square$

De la definición de la topología τ en el teorema previo, se tiene que cada punto de $X \setminus \Delta$ tiene el mismo carácter local en (X, τ) tal como en (X, σ), y este último es de carácter $2^{\mathfrak{c}}$. Esto también es cierto para el subespacio $(Z, \tau|_Z)$ ya que Δ es denso en ambos espacios. Como es consistente que $2^{\mathfrak{c}} = \omega_2$, se tiene el siguiente resultado:

3.14 Corolario. *Es consistente que no cualquier espacio P de Tychonoff de carácter ω_2 es débilmente Whyburn.*

Este corolario debería ser comparado con el siguiente resultado, que es la Proposición de 2.7 de [32].

3.15 Lema. *[32] Cada espacio P de Hausdorff de carácter ω_1 es de Whyburn.*

Por otro lado, un espacio P de carácter ω_1 que es T_1, ni siquiera necesita ser débilmente Whyburn.

3.16 Ejemplo. *Sea $X = \omega_1 \cup \{p, q\}$ con la siguiente topología: cada punto de ω_1 es aislado y las vecindades de p (respectivamente, q) son de la forma $\{p\} \cup (\omega_1 \setminus C)$ (respectivamente, $\{q\} \cup (\omega_1 \setminus C)$) donde C es numerable.*

La topología co-numerable en un conjunto no numerable es un espacio P hereditariamente Lindelöf que no es débilmente Whyburn. No obstante, un espacio T_2 hereditariamente Lindelöf tiene pseudocarácter numerable y, por tanto, si también es un espacio P, entonces es numerable y discreto.

Es conocido de [36], que cualquier espacio T_3 disperso es débilmente Whyburn. Una simple modificación del espacio construido en el Teorema 3.13 muestra que este resultado no se extiende a espacios P de Hausdorff y dispersos.

3.17 Ejemplo. *Con la notación del Teorema 3.13, sea μ la siguiente topología: Cada punto $x \in \Delta$ es aislado y U es una vecindad μ-abierta de $z \in X \setminus \Delta$ si y sólo si $z \in U$ y $V \cap \Delta \subseteq U$ para algún $z \in V \in \sigma$*

Nótese que $X \setminus \Delta$ es un subespacio cerrado discreto del espacio de Hausdorff (X, μ) y, por tanto, este espacio es disperso con orden de dispersión 2. Se sigue como antes que (X, μ) no es débilmente Whyburn.

3.4. La Propiedad de Whyburn en Espacios Dispersos y Submaximales

Como mencionamos anteriormente, la extensión de Katětov de ω muestra que no todo espacio de Urysohn disperso es débilmente Whyburn. Así que resulta natural preguntar si se satisfacen las siguientes:

1. ¿Un espacio denso en sí mismo, submaximal y Whyburn debe ser regular?
2. ¿Cualquier espacio semiregular disperso es de Whyburn?

A continuación, damos una respuesta parcial a la primera pregunta. Mostramos que una submaximalización de un espacio resoluble nunca es de Whyburn y, respondemos la segunda pregunta, construyendo un espacio semiregular disperso con orden de dispersión 2 que no es débilmente Whyburn.

3.18 Teorema. *La submaximalización de un espacio de Hausdorff resoluble no es débilmente Whyburn.*

Demostración. Supongamos que (X, τ) es un espacio de Hausdorff resoluble y $\mathcal{F}$ es un filtro maximal de densos en X. Primero mostraremos que existe $F \in \mathcal{F}$ tal que $X \setminus F$ es denso en alguna parte en X. Supongamos lo contrario, esto es, que ninguna de tales F's existen, entonces para cada $F \in \mathcal{F}$, se tiene que $U_F = X \setminus F$ es denso en ninguna parte. Ahora, sean D y D' subconjuntos densos complementarios de X. Como $int_X(F) = X \setminus cl_X(X \setminus F)$ para cada $F \in \mathcal{F}$, se sigue que $int_X(F)$ es denso en X y también que $D \cap int_X(F) \subseteq D \cap F$ y $D' \cap int_X(F) \subseteq D' \cap F$ son densos en X. Como $\mathcal{F}$ es maximal, cualquier conjunto denso que intersecta a cada elemento de $\mathcal{F}$ en un conjunto denso es un elemento de $\mathcal{F}$; de donde, $D \in \mathcal{F}$ y $D' \in \mathcal{F}$, lo que es una contradicción, pues no puede haber dos elementos ajenos en $\mathcal{F}$.

Sean σ la topología generada por $\tau \cup \mathcal{F}$ y $F \in \mathcal{F}$ tal que $X \setminus F$ es denso en alguna parte; así, $int_\sigma(cl_\sigma(X \setminus F)) = U \neq \emptyset$. Sea $x \in cl_\sigma(V) \setminus F$ donde $V = U \cap F$ y note que V es infinito. Entonces, si $B \subseteq V$ es tal que $x \in cl_\sigma(B)$, se sigue que $W = int_\sigma(B) \neq \emptyset$. De manera que, $cl_\sigma(W) \cap (X \setminus F) = cl_\tau(W) \cap (X \setminus F) = cl_\tau(cl_\tau(W) \cap (X \setminus F)) \cap (X \setminus F)$ es infinito. $\square$

3.19 Lema. *Si $\omega \subseteq X \subseteq \beta\omega$, entonces X es hereditariamente débilmente Whyburn si y sólo si X es disperso.*

Demostración. The sufficiency is clear since a subspace of a scattered space is scattered and it was proved in [4] that a regular scattered space is weakly Whyburn. Furthermore, it is easy to see that if the dispersion order of X is 2, then it is Whyburn also.

Para la suficiencia, basta recordar que los subespacios de un espacio disperso son dispersos y hacer uso del Teorema 1.19.

Para la necesidad, supongamos que X no es disperso. Entonces existe un subconjunto no vacío $I \subset X$ denso en sí mismo, digamos que $Y = \omega \cup I \subseteq X$. Como cualquier subconjunto abierto infinito $B \subseteq \omega$ es tal que $cl_{\beta\omega}(B)$ es abierto en $\beta\omega$, se tiene que $cl_{\beta\omega}(B) \setminus \omega$ es abierto en $\beta\omega \setminus \omega$ y, en consecuencia, si $cl_Y(B) \setminus \omega \neq \emptyset$ se sigue que $cl_Y(B) \setminus \omega = (X \cap cl_{\beta\omega}(B)) \setminus \omega = I \cap cl_{\beta\omega}(B)$ es un abierto en I. De manera que, $|cl_Y(B) \setminus \omega| = |I \cap cl_{\beta\omega}(B)|$ es infinito pues de lo contrario, $cl_Y(B) \setminus \omega$ es cerrado y discreto en I. Por tanto, X no es débilmente Whyburn. $\square$

En contraste con el último resultado nótese que bajo CH el subespacio de P-puntos de $\beta\omega \setminus \omega$ tiene carácter ω_1 y, se sigue de la Proposición 2.7 de [32] que este espacio es de Whyburn.

Los siguientes resultados están relacionados con los espacios resolubles (ver Definición 1.25).

3.20 Ejemplo. *Existe un espacio numerable, ω-resoluble pero no débilmente Whyburn.*

Demostración. El conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ es ω-resoluble. Por 6.10 de [20], como $\mathbb{N}$ es C^*-encajado en $\mathbb{Q}$ se tiene que $cl_{\beta\mathbb{Q}}(\mathbb{N}) = \beta\mathbb{N}$. En consecuencia, si $D \subset cl_{\beta\mathbb{Q}}(\mathbb{N}) \setminus \mathbb{N}$ es numerable y denso en sí, se sigue que $X = \mathbb{Q} \cup D \subseteq \beta\mathbb{Q}$ es numerable y ω-resoluble.

Luego, como X es denso en sí, por ser la unión de conjuntos densos en sí, no es disperso. En particular, $Y = \mathbb{N} \cup D$ no es disperso porque D es denso en sí. Así que, por el Lema 3.19, Y no es débilmente Whyburn y, por tanto, X no es débilmente Whyburn. $\square$

La construcción del siguiente ejemplo depende de la existencia de un espacio de Hausdorff, numerable y ω-resoluble que no es débilmente Whyburn.

3.21 Ejemplo. *Sean (Z,τ) un espacio ω-resoluble, numerable pero no débilmente Whyburn y $X = Z \times \{0,1\}$ con la siguiente topología:*

1. *Los puntos de $X_0 = Z \times \{0\}$ son aislados.*

2. *La vecindad de cualquier $(q,1) \in X_1 = X \setminus X_0$ es $W_{U_q} = \{(q,1)\} \cup [(U_q \setminus D_q) \times \{0\}]$ donde U_q es una vecindad de q en (Z,τ). Sea $\{D_p : p \in Z\}$ una familia numerable de subconjuntos densos y mutuamente ajenos tales que $Z = \bigcup_{p \in Z} D_p$. Sin perder generalidad, convenimos que $q \in D_q$ para cada $q \in Z$.*

Entonces, X es un espacio semiregular pero no regular, disperso con orden de dispersión 2 que no es débilmente Whyburn.

Demostración. X es semiregular. Como los puntos de X_0 son aislados, basta analizar las vecindades de los puntos en X_1. Sea W_{U_p} una vecindad abierta de cualquier $(p,1) \in X_1$. Entonces $cl_X\big(W_{U_p}\big) = [(U_p \setminus D_p) \times \{0\}] \cup (cl_Z(U_p) \times \{1\})$. Luego, $int_X\big(cl_X\big(W_{U_p}\big)\big) = W_{U_p}$, pues si $r \neq p$ y $(r,1) \in int_X\big(cl_X\big(W_{U_p}\big)\big)$ entonces existe un abierto $W_{U_r} \subset X$ de $(r,1)$ tal que $W_{U_r} \subset cl_X\big(W_{U_p}\big)$, de manera que existe un abierto $U_r \times \{0\}$ en (Z,τ) correspondiente a W_{U_r} tal que $(U_r \cap D_p) \times \{0\} = \emptyset$, lo que no puede suceder debido a que D_p es denso en Z. Por tanto, $(r,1) \notin int_X\big(cl_X\big(W_{U_p}\big)\big)$ y, en consecuencia, X es simiregular.

X no es regular debido a que las vecindades W_{U_p} de un punto arbitrario $(p,1)$ no contienen vecindades cerradas de $(p,1)$.

X no es débilmente Whyburn. Como Z no es débilmente Whyburn, existe un subconjunto $A \subset Z$ Whyburn-cerrado que no es cerrado. Afirmamos que, $A' = A \times \{0\} \subset X_0$ es Whyburn-cerrado pero no cerrado en X.

Puesto que para cada $B \subset A$ se satisface que $|cl_Z(B) \setminus A| \neq 1$, tomemos cualesquiera dos puntos distintos $p, q \in cl_Z(B) \setminus A$. Entonces, para cualesquiera abiertos básicos U_p y U_q de p y q, respectivamente; resulta que $U_p \cap B \neq \emptyset$ y $U_q \cap B \neq \emptyset$. Sea $B' = B \times \{0\}$. Tenemos dos casos:

Caso 1. Si $(U_p \setminus D_p) \cap B \neq \emptyset$ y $(U_q \setminus D_q) \cap B \neq \emptyset$, entonces $[(U_p \setminus D_p) \times \{0\}] \cap B' \neq \emptyset \neq [(U_q \setminus D_q) \times \{0\}] \cap B'$. De manera que, $W_{U_p} \cap B' \neq \emptyset \neq W_{U_q} \cap B'$. De donde, $(p,1)$ y $(q,1) \in cl_X(B')$. En consecuencia, $|cl_X(B') \setminus A'| \neq 1$.

Caso 2. Si $B \subset D_p$ para algún $p \in cl_Z(B) \setminus A$, entonces $[(U_p \setminus D_p) \times \{0\}] \cap B' = \emptyset$, de donde, $(p,1)$ es el único punto en que no está en $cl_X(B') \setminus A'$, pues para cada $q \in cl_Z(B) \setminus A$ con $p \neq q$ resulta que $(q,1) \in cl_X(B') \setminus A'$

En consecuencia, $|cl_X(B')\setminus A'| \neq 1$. Por tanto, X no es débilmente Whyburn.

$\square$

Preguntas Abiertas

1. ¿Un espacio inicialmente κ-compacto y secuencial (Whyburn) es fuertemente κ-compacto?

2. Suponiendo que X es un espacio inicialmente κ-compacto y radial. ¿X es fuertemente κ-compacto?

3. ¿El producto de un espacio κ-red X con un espacio κ-red, T_3 y localmente compacto Y, es un espacio κ-red?

4. ¿El producto de dos espacios k de Whyburn es débilmente Whyburn?

5. ¿El producto de dos espacios compactos débilmente Whyburn sigue siendo débilmente Whyburn?

6. ¿El producto de un espacio Fréchet y localmente compacto por un espacio métrico compacto es Whyburn o débilmente Whyburn?

7. ¿El producto de un espacio secuencial por un espacio k (localmente compacto) y débilmente Whyburn es débilmente Whyburn?

8. ¿El producto de un espacio numerablemente compacto y semiradial por un espacio localmente compacto y débilmente Whyburn es débilmente Whyburn?

9. ¿La ω-modificación de $\beta\omega$ es débilmente Whyburn?

10. ¿Es cierto en ZFC que cualquier espacio de Lindelöf y débilmente Whyburn de cardinalidad no numerable tiene un subespacio de Lindelöf de cardinalidad ω_1?

11. ¿Existe un espacio P de Lindelöf y débilmente Whyburn que no sea pseudoradial?

12. ¿El producto de dos espacios P de Lindelöf y débilmente Whyburn es débilmente Whyburn?

13. ¿Existe en ZFC un producto de espacios P de Whyburn y de Lindelöf que no sea Whyburn?

14. ¿Cualquier espacio de Tychonoff, pseudocompacto y (débilmente) Whyburn tiene una sucesión convergente no trivial?

15. ¿La cota $\psi(x, X) < \aleph_\omega$ es necesaria en el Teorema 3.12?

16. Suponiendo que $|X| > 2^{d(X)}$. ¿X puede ser débilmente Whyburn?

17. ¿Existe en ZFC un subespacio de $\beta\omega$ que sea de Whyburn y denso en sí mismo?

Bibliografía

[1] O.T. Alas *Density and continuous functions*, Atti Accad. Naz. Lincei 48 (1970), 129-132.

[2] O.T. Alas; M. Madriz y R.G. Wilson *Some results and examples concerning Whyburn Spaces*, por aparecer en Applied General Topology.

[3] P. Alexandroff y P. Urisohn, *Zur Theorie der topologischen Räume*, Math. Ann. 92 (1924), 258-266.

[4] A. Arhangel'skii, *Frequency spectrum of a topological space and classification of spaces* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR 206 (1972), 265-268.

[5] R. Arens, *Note on convergence in topology*, Math. Mag. 23 (1950), 229-234.

[6] J.W. Baker, *Ordinal subspaces of topological spaces*, General Topology Appl., 3 (1973), 85-91.

[7] R.G. Bartle, *Nets and filters in topology*, Amer. Math. Monthly. 62 (1955), 551-557.

[8] A. Bella y I.V. Yaschenko, *On AP and WAP spaces*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 40 (1999), no. 3, 531-536.

[9] A. Bella, *On spaces with the property of weak approximation by points*, Comment. Math. Univ. Carolinae, 35 (1994), no. 2, 357-360.

[10] A. Bella; C. Costantini y S. Spadaro , *The Whyburn property in the class of P-spaces*, Dipartimento di Matematica, Università Di Torino, 17, 2007.

[11] G. Birkhoff, *Moore-Smith convergence in general topology,* The Annals of Mathematics, 38, No. 1 (1937), 39-56.

[12] T.K. Boehme, *Linear s-spaces*, Symposium on Convergence Structures, University of Oklahoma, Norman 1965.

[13] H. Cartan, *Filtres et ultrafiltres*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Paris, 205 (1937), 777-779.

[14] J.G. Ceder, *On maximally resolvable spaces*, Fund. Math. 55 (1964) 87-93.

[15] W.W. Comfort y S. Negrepontis, *The Theory of Ultrafilters*, Springer Verlag, New York, 55 (1974).

[16] E.K. van Douwen, *The integers and topology*, Handbook of Set-Theoretic Topology, ed. por K. Kunen y J. E. Vaughan, North Holland P. C., Amsterdam, 111-167.

[17] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[18] S.P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice*, Fund. Math. 57 (1965), 107-115.

[19] S.P. Franklin, *Spaces in which sequences suffice II*, Fund. Math. 61 (1967), 51-56.

[20] L. Gillman y M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, New York, 1960.

[21] E. Hewitt, *A problem of set-theoretic topology*, Duke Math. J. 10 (1943) 309-333.

[22] R.E. Hodel, *A theory of convergence and cluster points based on κ-nets*, Topology Proceedings 35 (2010), 291-330.

[23] R. Hodel, *Cardinal Functions I*, Handbook of Set-Theoretic Topology, ed. por K. Kunen y J.E. Vaughan, North Holland P.C., Amsterdam, 1-61.

[24] I. Juhász, *Cardinal Functions in Topology -Ten years later*, Math. Centre Tracts 123, Amsterdam 1980.

[25] J.L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, 1955.

[26] M. Madriz y R.G. Wilson, *Topological properties defined by nets*, Topology and its Applications 158, (2011), 2043-2048.

[27] P.R. Meyer, *Sequential properties of ordered topological spaces*, Compositio Mathematicae, 21 (1969), 102-106.

[28] P.R. Meyer, *Sequential space methods in general topological spaces*, Colloquium Mathematicum, 22 (1971), 223-228.

[29] A.K. Misra, *A topological view of P-spaces*, General Topology and its Applications 2, 1972, 349-362.

[30] E.H. Moore y H.L. Smith, *A general theory of limits*, Amer. J. Math. 44 (1922), 102-121.

[31] E. Murtinova, *On (weakly) Whyburn spaces*, Topology and its Applications 155, Nos. 17/18 (2008), 2211-2215.

[32] J. Pelant; M.G. Tkachenko; V.V. Tkachuk y R.G. Wilson, *Pseudocompact Whyburn spaces need not be Fréchet*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 10, 3257-3265.

[33] J.R. Porter y R.G. Woods, *Extensions and Absolutes of Hausdorff Spaces*, Springer Verlag, New York, 1987.

[34] A. Pultr y A. Tozzi, *Equationally closed subframes and representations of quotient spaces*, Cahiers de Topologie et Geometrie Differentielle Categoriques 34 (1993), 167-183.

[35] R.M. Stephenson Jr., *Initially κ-compact and related spaces*, in Handbook of Set-theoretic Topology, eds., Kunen and J. Vaughan, North Holland, Amsterdam, 1984, 603-632.

[36] V.V. Tkachuk y I.V Yaschenko, *Almost closed sets and the topologies they determine*, Comment. Math. Univ. Carolinae 42 (2001), 395-405.

[37] J.W. Tukey, *Convergence and Uniformity in Topology*, Annals of Mathematics Studies, Princeton (1940).

[38] G.T. Whyburn, *Accessibility spaces*, Proceedings Amer. Math. Soc. 24 (1970), 181-185.